教育実践研究　第30集（2020）85－90

［算数・数学］

創造的な学習を目指した教材に関する一考察

－「拡張による統合」に焦点をあてて－

古川　史洋*

1　はじめに

平成29年に告示された中学校学習指導要領解説数学編（以下，新学習指導要領）では，「今回の改訂では，数学的に考える資質・能力を育成する上で，数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動を通して学習を展開することを重視することとした（p.23）」と述べられており，数学的な見方・考え方の育成が一層重要視されてきている。

中島（1982）[1)]は，数学的な考え方の育成について，「『数学的な考え方』の育成とは，端的に言って，『算数・数学にふさわしい創造的な活動ができるようにすること』であるが，そのためには，日常の算数・数学の指導において，個々の指導内容について創造的な指導を行い，子どもに創造的な過程の体験を積み重ねることが必要である（p.69)。」と述べている。つまり，日常的に創造的な指導を行うことで，生徒が次第に数学的な考え方を身に付け，創造的な活動ができるようになっていくのである。また，中島（1982）は「特に，『拡張による統合』の立場にもとづいて創造的な活動を行う場合が，『数学的な考え方』の指導においても，実質的には重要な位置を占めている（p.91)。」と述べている。中島は「統合」の意味について①集合による統合，②拡張による統合，③補完による統合の３つの場合があることを示し，創造的な活動を行う上での「統合」の重要性や価値を明らかにしている。新学習指導要領でも，28年12月に中教審答申で示された，「算数・数学の学習過程のイメージ（以下，イメージ図）（図１）」を用いて，数学的活動における問題発見・解決の過程を示した中で，統合的・発展的に考えて問題を解決できるようになることが目標の一つとして掲げられている。さらに，得られた結果を統合・発展的に考察し，新たな数学的問題を作り出す過程が示されるなど，「統合」の考えが算数・数学の学習過程において重要な考え方であることが分かる。

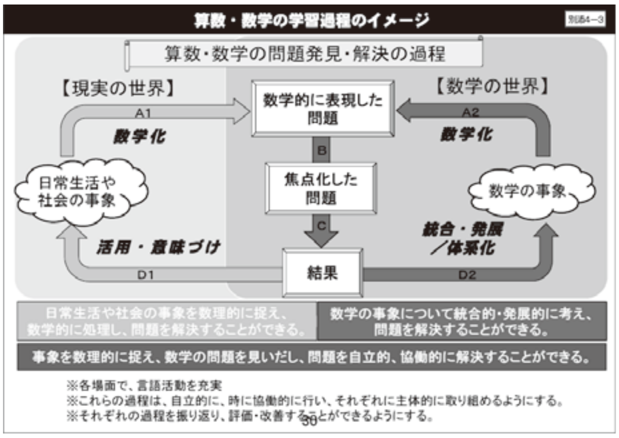


図１　算数・数学の学習過程のイメージ（文部科学省，2018）

しかし，中島の言うように生徒が日常的に統合の視点を持ちながら創造的な活動を行うことは，容易ではない。実際の生徒の学習活動を見ていても，既習事項と関連付けたり，一見異なるものを同じものと見ようとしたりする，統合的な見方をしている生徒はさほど多くはない。多くの生徒がそのような活動を行うためには，教師によってよく設計された教材が必要であると考える。そこで，本研究では，中島の「拡張による統合」に着目し，生徒が「統合」の視点に基づいて創造的な学習をすることが可能となる教材を提案する。

「拡張による統合」に着目した研究として，高濱（2016）がある。高濱は拡張による統合の視点に基づき，面積に関する教材について研究を行い，面積指導への示唆を示している。本研究では数と式領域での教材開発を行うとともに，その実践及び分析を行う。

2　研究の目的

中島（1982）は，創造的な学習活動において「拡張による統合」という視点が重要であると述べている（p.91)。このことから，本研究では中島（1982）の「拡張による統合」の視点を援用し，本研究の目的を，生徒が創造的な学習を

---

*柏崎市立東中学校

する姿を実現するために「拡張による統合」の視点に基づいた教材を開発し，その実践を通して生徒の創造的な学習の様相を明らかにすることとする。

3　実践の構想と分析の方法

本実践は，算数・数学科における創造的な学習を実現するために，中島（1982）における「拡張による統合」に着目する。また，次の三つの手立てから単元を構想し，研究していくこととした。第一に，単元構成の工夫である。本研究では，２次方程式の単元での授業を構想したが，「拡張による統合」の視点から，教科書上の単元構成から変更し，実践を行った。第二に，課題設定の工夫である。開発した教材は，折り紙を折る場面を扱う問題とした。実際に生徒が手を動かしながら考えることができるため，問題場面を把握しやすくなり，生徒が問題に取り掛かりやすくなると考える。第三に，問いの配列の工夫である。提案する授業は大きく三つの問いを考えるが，その配列を工夫し，問いを考えていくうちに拡張による統合へ思考が流れていくようにした。

これらの手立てを講じた教材を開発し実践を行う。授業は，ワークシートを用いて行い，教室全体を映した授業の映像と抽出生徒の近くにICレコーダーを置いて得た音声データを採取する。それらのデータをもとに過程を追って，生徒が「拡張による統合」へ至った場面を抽出し，統合した契機やその仕方に焦点を当てて分析を行う。

4　中島（1982）における「拡張による統合」の意味

中島（1982）は，統合を，①集合による統合②拡張による統合③補完による統合の三つに分類している。ここでは，紙面の都合上，本研究で着目する「拡張による統合」のみを取り上げる。

> はじめに考えた概念や形式が，もっと広い範囲（はじめの考えでは含められない範囲のものまで）に適用できるようにするために，はじめの概念の意味や形式を一般化したもとのものも含めてまとめる場合である（図３．２（図２））。たとえば，１位数どうしについて考えた計算が，２位数，３位数でも使えるようにする場合は，この最も卑近な場合であろう。（p.128　※図番号は筆者）

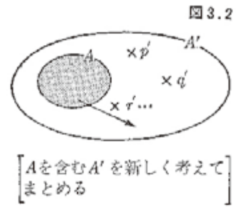


図２　拡張による統合の図
（中島，1982，p.128）

図２から，Ａという集合に対してＡを含むＡより広い集合としてA'が出てくることがわかる。つまり，生徒が拡張による統合の立場に基づいて創造的な学習活動をするためには，今学んでいること（Ａ）に対して，これから学ぶこと（A'）にうまく出会わせることが重要であると考える。

5　実践の結果と分析・考察

第３学年の学習内容である，「２次方程式」の単元について，生徒が創造的な学習活動ができるような教材を提案するとともに，「統合」とのかかわりを示す。

⑴　開発した教材

①　単元の流れ

本研究では，第３学年の学習内容である「２次方程式」の単元について教材を開発した。この単元は通常，２次方程式の解法を全て学習した後，「２次方程式の利用」に入るが，ここでは因数分解による解き方と平方根の考えを使った解き方の一部を学習した後に「２次方程式の利用①」を扱い，その後解の公式を用いた解法を学習し，さらに「２次方程式の利用②」を学習するという流れをとる（表１）。その理由は，初めの「２次方程式の利用①」であえて「解けない２次方程式」に出会わせることで，

表１　本研究における単元構成

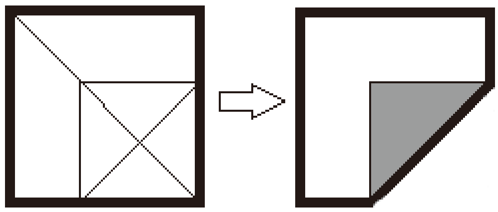
教科書上の単元構成	本研究における単元構成
（１）２次方程式の解き方	（１）２次方程式の解き方①
①２次方程式とその解	①２次方程式とその解
②因数分解を使った解き方	②因数分解を使った解き方
③平方根の考えを使った解き方	③平方根の考えを使った解き方 (平方完成を必要としない形まで)
④２次方程式の解の公式	$\boxed{（２）２次方程式の利用①}$
（２）２次方程式の利用	（３）２次方程式の解き方②
	①平方完成を用いた解き方
	②２次方程式の解の公式
	（４）２次方程式の利用②

「解けない２次方程式」と「解ける２次方程式」の違いを明確にし,「解けない２次方程式」には解がないのかを考えさせたいからである。そうすることで,「因数分解で解ける２次方程式は解が整数値となる特別な場合のみである」という統合的な見方へつながると考える。

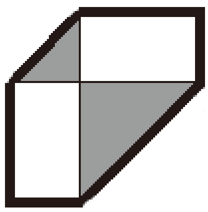
② 実践で扱う課題

本研究では，表１の「２次方程式の利用①」についての授業（３時間）を分析対象とする。そこで扱う課題は以下の課題である。

【問題１】一辺10㎝の正方形の折り紙を図のように折る。色のついた部分の面積は18㎠である。このとき，一辺何㎝で折ればよいか。



【問題２】両端から，角と角が合うように折ると，色のついた部分の面積は34㎠である。このとき，一辺何㎝で折ればよいか。



【問題３】「２つの直角三角形の面積の和が□㎠になるときの，直角二等辺三角形の一辺の長さを求めよう。」
□に当てはまる数を自分で設定し，解答を考えましょう。

③ 問いの配列について

問題１は生徒が問題場面を把握するための問題である。問題２では，この問題を解決することで，生徒が２次方程式を用いれば問題が解決できるのだと感得することを期待する。問題３において生徒は問題作りをする。このとき，□に当てはめる数値を25，26，29，34，41，50の６つのうちのいずれかにすると因数分解ができて２次方程式を解くことが可能となる。しかし，それ以外の数値にすると因数分解ができず，現段階では「解けない２次方程式」となる。生徒自身が数値設定を考えるため,「解けない２次方程式」を生徒が創出することができるのである。生徒自らが拡張・一般化をし，統合へと向かう契機となることを期待する。つまり,「解ける２次方程式」(集合Ａとする）に対して，それよりも広い範囲である「解けない２次方程式」(集合Ａ’）まで広げ，Ａの範囲で適用できたことをＡ’でも適用できないか考え，Ａ’はＡを一般化したものとしてとらえる,「拡張による統合」を行うことができる問いとして設定した。

⑵ 分析の対象と方法

①対象　新潟県内の公立中学校　第３学年３組35名（男子17名，女子18名）

②期間　令和元年８月28日，29日，30日（計３時間）

③分析の方法

授業の全体を撮影したビデオカメラ１台，抽出した２つのグループに設置したICレコーダー２台をもとに，プロトコルを起こし分析する。また，授業はワークシートを用いて行い，毎時間回収し分析対象とした。

⑶　授業の分析

授業は計３時間で行った。表２にその概要を示す。以下では，授業において，「拡張による統合」がなされていく様相を，具体的ないくつかの場面を取り上げながら示す。

表２　授業の概要

時数	学習内容
第１時	【問題１】に取り組み，３種類の解決方法を共有した。 【問題２】の自力解決を行った。
第２時	【問題２】の解決方法を共有した。 【問題３】の自力解決を行った。
第３時	【問題３】への取組状況を確認した。 抽出生徒Ａの発言から，38㎠となるときの場合を全体で考えた。

①　「拡張による統合」の場面

ア）因数分解できない２次方程式に出会う場面

第２時の後半から問題３に入り，第３時でそのまとめを行った。ここでは，因数分解ができない２次方程式に出会う場面を示す。第３時の初めに抽出生徒Aを指名し，面積の和が38㎠となる場合はあるのかを全体に考えさせた。以下はその時の授業プロトコルである。

T1：昨日，困った人が出てきたんですけど，困った人（挙手)。何で困ったの？
S1 ：数値が当てはまらない。
T2：当てはまらない？なんでもいいんでしょ？当てはめるのは。思いついた数字で。何を困った？困った人，もう一回挙手。何を困った？例えばいくつ当てはめたの？
S2(A)：38
T3：Ａさんは38を当てはめたんですけど，これ，答え出た？
S3(A）：出ない。
T4：なんで？
S4（A）：因数分解ができなかった。
T5：38㎠になるタイミングってあると思いますか。ないと思いますか。こことここの面積を合わせて，38㎠になるタイミングがあると思う人（→０人)。ないと思う人（→８人)。なぜないの？
S5：・・・

問題３において，抽出生徒Aは第２時の段階で，面積を38㎠に設定し，方程式を解こうとしていた。すると，一方の直角二等辺三角形の一辺の長さを$x$cmとしたとき，$x^2-10x+12=0$という２次方程式となる。これは，整数の範囲では因数分解できない式であるが，生徒Ａはこの方程式に「×」をつけ，解けないことを表現していた（図３)。また，T2の問いかけに対して挙手をして行き詰まりを訴え，S3，S4で因数分解ができないから解が出ないことを発言している。

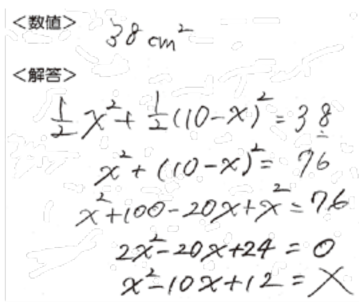


図３　生徒Ａのワークシート

さらに，T5で面積が38㎠になるタイミングはあるかと問うと，「ある」という生徒はいなく，「ない」という生徒が数人いた。また，なぜ「ない」と思うのかを問うと，明確に答えられる生徒はいなかった。このことから生徒Ａやそれ以外の生徒が，２次方程式$x^2-10x+12=0$は解けない２次方程式であると感じていたことが分かる。つまり，この場面は生徒が「解ける２次方程式」（集合Ａとする）に対して，それよりも広い範囲である「解けない２次方程式」（集合A'）に出会った場面である。

イ）考察対象としている数値の範囲を整数から実数へ広げる場面

２次方程式$x^2-10x+12=0$が解けるか解けないかを議論しているときに，ある生徒が，求める一辺の長さは整数に限るのかどうかを質問してきた（S6)。

T6：この２次方程式は本当に解けないんですかね。
S6 ：先生，小数でもいいんですか？
T7：ん？小数？みなさんどう思う？
S7 ：あー，なるほど。
S8 ：折るときに整数って指定はないから，小数でもいいと思う。
T8：じゃあ，小数でもよさそうですよね。

なぜ，この生徒が整数に限らないことを思いついたのかは，今回採ったデータからは判断できない。しかし，整数以外の数値にまで考察対象を広げることで，次のウ）に示す場面において生徒の考えが変容していったことが分かる。

ウ）面積が38㎠となるタイミングはあるはずだと生徒の考えが変容した場面

イ）の場面のあと，面積が38㎠になるタイミングは本当にないのかをもう一度問いかけた。すると，イ）の場面のS6の発言をきっかけとして，考えが変容していった生徒がいた。以下はその場面の授業プロトコルである。

T9：では最後。さっきの，因数分解ができなかったけど，もう一回聞くよ。この場合（面積が38㎠になる場合）って，あるの？38㎠になるタイミングって。 S9 ：なくはない。 S10：分数でもいいんだったら別に・・・。 S11：ないです。いや，あるか。わからないです。 T10：ちょっと周りと相談してごらん。先生が今聞いていること分かる？面積の和が38㎠になるような折り方は，あるのか，無いのか。 ～グループでの話し合い～（中略） T11：もう１回聞くよ，あるか，無いか。あると思う人（挙手→十数人）。無いと思う人（挙手→２人）。 SS12：おー。 T12：じゃあさっき「ある」は０人だったので，考えが変わった人，理由は何？ S13：最大50，最小25だから。 S14：その間なら全てある。 S15：その間の範囲なら，全てある。 S16：そう。 T13：けど，ここ（６つの整数の解の組み合わせの中）には無いんだよね？ S17：はい。整数ではない。 T14：じゃあ何？ S18：整数じゃないんですよ。 T15：整数じゃないの？解は。	S19：そうです。はい。 S20（B）：１から２の間。 T16：B君，もう１回言って。 S21(B)：１から２の間と，８から９の間にありますね。絶対。 S22：何が？ S23(B)：面積が41（１㎝，９㎝で折ったとき）と34（２㎝，８㎝で折ったとき）の間に38があるじゃないですか。だから，xが，１と２の間に，１個目のxがあるのではないか。１点いくつ。 T17：言ってること分かった？（中略） T18：ということは，因数分解ができないって言ってますけど，何にこだわってるからできないの？ SS24：整数 T19：それいい？整数の範囲だとできないんだよね。整数の中では，因数分解ができませんよ。でも面積が38㎠になるタイミングは，さっきB君が言った通り，存在しそうですよね。ということは，整数の範囲ではなくて，小数，分数，あと何数知ってる？ S25：ルート T20：何数って言った？無限に続く循環しない小数 S26：無限小数 S27：無理数 T21：小数とか分数とか，無理数も含めて考えれば，この式（$x^2-10x+12=0$）の解って求めることができるんですよ。因数分解もできるんですよ，やろうと思えば。

T9において面積が38㎠になるタイミングがあるかを再び問いかけると，S10「分数でもいいんだったら」の発言のように，整数以外の範囲ならありそうだという生徒が数名出てきた。しかし，「面積が38㎠になるタイミングがあること」と「２次方程式$x^2-10x+12=0$の解が存在すること」との関連がついている生徒が少ないと感じたため，周りの生徒と確認する時間を設けた。このことを確認した後，T11でもう一度，面積が38㎠になるタイミングがあるかを問うと，「ある」と考えるようになった生徒が10人以上現れた。その理由を問うと，S13「最大50，最小25だから。」に加え，S23のような説明がなされ，２次方程式$x^2-10x+12=0$の解の１つは１と２の間の数であるという考えが共有された。

② 「拡張による統合」がなされた契機

①では，授業で見られた「拡張による統合」の場面を示した。ここでは，その場面を振り返り，何を契機に「拡張による統合」がなされたのかを考察する。

ア）拡張・一般化がなされた契機

本実践では，「因数分解できない２次方程式」に出会わせるために，生徒に問題作りをさせた。すなわち，面積を変数的に捉えさせることで様々な場合を考えさせ，一般化へと導いた。この点については，中島（1982）も「定数であったものを何らかの形で変数としてとらえ，そうしたことに目をつけることも，一般化の際に重要なことである（p.147)」と述べている。本実践では，変数的に捉える場面として，生徒が問題の数値設定を考える問いを設定した。この問いが効果的に働き，一般化へとつながり，生徒が自ら「因数分解できない２次方程式」を創出する結果となった。

イ）統合がなされた契機

実践授業では，面積38㎠となるタイミングがあるのかどうかが議論になった。「ある」と考える生徒の根拠になったのは，「面積の最小が25㎠で最大が50㎠であり，38㎠はその間の面積だから」ということである。面積が折り方によってどのように変化していくかについては，中学校３年生にとっては“イメージ”で捉えるしかないが，このことについては多くの生徒が納得していたようである。この根拠に基づき，面積が38㎠になるタイミングはあるだろうという考えのもと，「あるとしたら整数ではない」という考えに至った。すなわち，「存在するとしたら」という仮定をおくことで，今までの前提を見直し，修正を加えた結果，有理数・無理数まで含めれば解は存在するという結論に至ったのである。このことから，「仮定」が生徒を統合へと向かわせる契機となったことが明らかとなった。

6　研究のまとめと成果

本研究では，中島（1982）における「拡張による統合」の視点に基づいた教材を開発し，実践を行った。授業実践とその分析を通して，生徒が定数的な部分を変数的に捉えることで，因数分解では解くことのできない２次方程式を自ら創出するに至ったことが分かった（前節①ア）の場面）。また，一辺の長さは整数値とは限らないという考えを手掛かりに，考察対象としている数の範囲を広げ，小数値の解が存在しそうであるという認識に変容したことが明らかとなった（前節①イ），ウ）の場面）。これらのことから，生徒が「拡張による統合」へ向かう際に，①定数的なものを変数的に見ることによって一般化を志向すること，②変数的に見る際には，生徒に数値設定を考えさせる作問問題が有効であること，③「あるとしたら」などの仮定をおくことで統合へと向かうこと，の３点が明らかとなった。

さらに，第３時の最後に生徒が記述した学習感想に，次のような記述がみられた（図 4）。この記述から，創造的な学習が生徒の情意面に変化をもたらしたことが分かる。このような感情を持つことが，次に数学の問題に取り組む際にも，自ら統合的・発展的に考えてみようとする態度につながると考える。このような事例が得られたことも成果の一つである。

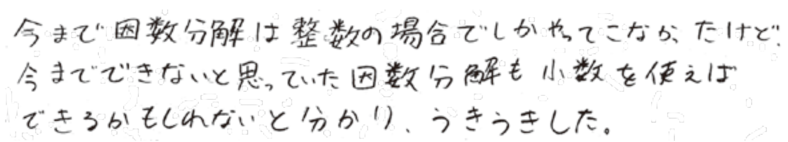


図４　生徒Ｃが記述した学習感想

7　今後の課題

本研究で明らかとなった「拡張による統合がなされた契機」については，本実践のみに言えることである。このことが他の教材や単元でも効果的に働くかについては，様々な実践をしてみる必要がある。また，本実践で生徒が「整数の範囲だけでなく，小数ではだめなのか」と考えたきっかけを明らかにすることができなかった。そのような発想に至るきっかけを明らかにし，手立てや工夫を考察することも今後の課題である。

引用・参考文献

1）本研究において中島（1982）と記述しているものは，2015年に東洋館出版社より出版された『復刻版　算数・数学教育と数学的な考え方－その進展のための考察－』をもとに参照したものである。この書籍は1982年に金子書房により刊行された『算数・数学教育と数学的な考え方－その進展のための考察－第二版』を復刻したものである。

高濱良匡「『拡張による統合』に焦点をあてた教材についての研究 : 面積に関する教材を事例として」，修士論文，東京学芸大学数学科教育学研究室，2016年

中島健三『復刻版　算数・数学教育と数学的な考え方－その進展のための考察－』東洋館出版社，2015年（この書籍は1982年に金子書房より刊行された『算数・数学教育と数学的な考え方－その進展のための考察－第二版』を復刻したものである。）

一松信ほか『中学校　数学３』，学校図書株式会社，2016年

文部科学省「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）（中教審第197号）」，2016．http://www.mext.go.jp/component/b_menu/shingi/toushin/__icsFiles/afieldfile/2017/01/10/1380902_3_2.pdf（参照2019_10_3）

文部科学省『中学校学習指導要領（平成29年告示）解説　数学科編』，日本文教出版，2018年