教育実践研究　第18集（2008）67－72

［算数・数学］

立体の性質をとらえるために関数の考えを用いた授業実践とその考察

－６年生「いろいろな立体」の実践を通して－

中澤　和仁*

1　主題設定の理由

図形指導について，古藤（1990）は，「算数科の図形指導のねらいの中で，今後一層重視しなければならないものの一つとして，図形の学習を通して，直観的な見方に支えられた『筋道を立てて考える能力』の育成を挙げることができよう。」（p.17）と述べている。確かに，小学校学習指導要領解説算数編（1999）には，図形領域のねらいの二つめとして，「図形の学習を通して，論理的な考えの進め方を知り，それを用いることができるようにするとともに，その過程を通じて数学的な考え方の育成を図ることも重要なねらいである。」（p.48）と書かれている。

つまり，「筋道を立てて考える能力」や「論理的な考え」などの「数学的な考え方」の育成をバックボーンにもつ算数的な活動をすることで概念同士が結び付き，実感を伴った用語の意味の理解など，学習内容の理解が進むということである。

田渕（1991）は，直観力を生かし，論理的な思考力を育成する指導の重点として，「平行四辺形の辺の長さをすべて等しくすればひし形が構成できることや，平行四辺形の作図方法をもとにすればひし形の作図ができることなど，平行四辺形との関係に着目させて，ひし形の定義と作図の仕方を理解させる。」と述べている。未習のひし形を単独で学習するのではなく，既習の平行四辺形との比較や考察によって，より明確にひし形の定義をとらえさせている。しかし，他の図形との比較ではなく，一つの立体を多面的に見ることで立体の性質をとらえることはできないだろうか。

そこで，本研究では６年生の「いろいろな立体」の単元において，他の図形との比較や考察ではなく，同じ立方体を用いて比較し考察する。そして，基になる立方体を組み合わせ，１サイズずつ大きくなる立方体を作った場合の基になる立方体の数の変化に着目する。そのために，数量関係領域の学習内容の一つである「関数の考え」を導入する。数量関係領域のねらいは，「『数と計算』，『量と測定』，『図形』の各領域の内容を理解したり，活用したりする際に用いられる数学的な考え方や方法を身につけることである。」（p.55）と小学校学習指導要領解説算数編（1999）に書かれている。また，この領域には３つの内容があり，そのうちの一つが「関数の考え」となっている。そこには，「関数の考えとは，数量や図形について取り扱う際に，それらの変化や対応の規則性に着目して問題を解決していく考えである。」（小学校学習指導要領解説算数編（1999）p.55　下線は筆者が記入）と書かれている。１サイズずつ大きくなった立方体を観点ごとに表にまとめ，その数値の意味を考えることで，変化や対応の規則性に着目することができる。その過程で，立方体の構成要素である面や辺，頂点に着目するので，立方体の理解がより深まると考えた。

2　研究の目的

本研究は，図形領域に数量関係領域の学習内容の一つである「関数の考え」を導入することで，立方体の理解がより深まることを明らかにする。

3　研究の内容と方法

本研究の内容は，一つの立方体を多面的に見るための教材研究とその教材を用いた授業実践の考察である。

県内の公立小学校の６年生の１クラス（男子15名，女子11名，合計26名）に対して，平成19年６月15～27日に筆者が行った「いろいろな立体」の授業を考察した。具体的には次のように授業を進めた。

⑴単元の導入で，子どもが図形を比べたり，数値の意味に着目したりするために，等角投影法と斜投影法の２種類の

＊ 糸魚川市立田沢小学校

見取り図を提示し，構成要素を対応表にまとめる。

⑵１辺が４㎝の基になる立方体を提示し，既習内容である立方体の特徴を確認する。そして，もう１サイズ大きい立方体を作るには，この立方体が何個必要か考える（８個)。できた１サイズ大きい立方体の表面に色を塗ると，８個の基になる立方体は各々何面に色が塗られたことになるか考える（３面に色が塗られた)。さらに，１サイズ大きい立方体を作るには，基になる立方体が何個必要か考える（27個)。また，この立方体の表面に塗られた面の数に応じて異なる色を塗る。(図１参照）そして，27個の立方体について，色が塗られた面の数とその立方体の個数を考える（３面が８個，２面が12個，１面が６個，０面が１個)。さらに1サイズ大きい立方体も同様に考察する。

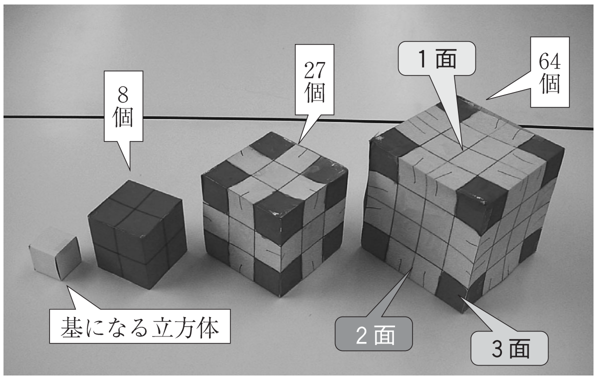


図１　準備した教具

⑶サイズが一つずつ大きくなるごとに，基になる立方体の個数と，色が塗られた面の数ごとの個数の対応の変化を表に表す。

⑷変化や対応の規則性に着目して，色が塗られた面の数ごとの立方体の個数の求め方や，表の数が意味するものを考える。

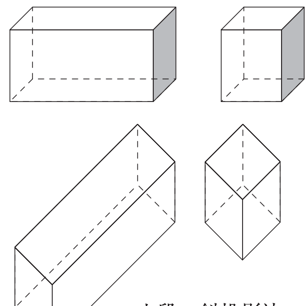
※基になる立方体に何面色が塗られているかをわかりやすくするために，図１のように塗られる面の数ごとに色を変えて提示した。比較し考察する観点が増えることで，子どもは「関数の考え」，つまり，変化や対応の規則性に着目して問題を解決することがしやすくなる。

※１サイズずつ大きくなる立方体の個数は，１辺に基になる立方体が並ぶ個数（長さ）の３乗になる。さらに，色が塗られた面の数ごとに，基になる立方体の個数を求めることで，観点が増えた表ができあがる。数値を求める過程や求めて埋められた表を見ることで，「関数の考え」を養えると考えた。そして，その説明の根拠は立方体の構成要素に帰着するので，立方体の構成要素をより明確にとらえることができる。

4　実践の概要及び結果

⑴　図形の比較や考察と数値への着目

まず，自分で考えを進めるために，また，自分の考えを振り返るために，自分で立体の図をかけるようにしたいと考えた。そこで，１時間目に２種類の見取り図のかき方を指導した。一つは子どもにとってかきやすいと思われる斜投影法，もう一つは教科書に載っている等角投影法の見取り図である。直方体と立方体をそれぞれのかき方で表したのが右の図２になる。



※　上段；斜投影法
※　下段；等角投影法

図２　２種類の見取り図

これをもとに，左の表３のように，教科書（学校図書，６年算数上p.38）にある直方体と立方体の構成要素の対応表を完成させた。

		直方体	立方体
面	形	長方形や正方形	正方形
	数(個)	6	6
辺	長さ	同じ長さの辺が４本ずつの３組	全部同じ長さ
	数(本)	12	12
頂点	数(個)	8	8

表３　直方体・立方体の構成要素

その後，図２をよく見た子どもは，かき方は違っても共通の部分があることを発見した。これら二つの投影法で作図した直方体と立方体のいずれも，見える面は３面で見えない面は３面，見える辺は９本（平行で長さが等しい３辺が３組）で見えない辺は３本（前述の組の残った１辺)，見える頂点は７つで見えない頂点は一つであった。それらをまとめると右の表４になる。

		直　方　体	立方体
面	教科書タイプ	３面見えるが３面見えない	同左
	かきやすいタイプ	同上	同左
辺	教科書タイプ	９本見える（平行で長さが等しい）が３本見えない	同左
	かきやすいタイプ	同上	同左
点	教科書タイプ	７つ見えるが１つ見えない	同左
	かきやすいタイプ	同上	同左

表４　２つの投影法でかかれた直方体と立方体の見取り図の見え方

同じ直方体や立方体の面や辺，頂点の数について，教科書にかかれた等角投影法の見取り図だけではなく，別のかき方の斜投影法の見取り図で確認することで，子ども

は，直方体や立方体の面の数は６，辺の数は12，頂点の数は８ということをより明確にとらえることができた。

子どもはここで，２つの投影法で表された直方体と立方体を比較し，同じところや異なるところを考察する経験を積んだ。また，求められた数値がもつ意味に着目するようになっていった。

⑵ 関数の考えを導入しての図形の理解の深まり

その後，子どもは４時間かけて，展開図（立方体の11種類の展開図を含む），面と面の垂直と平行，面と辺の垂直と平行を学習した。教科書では，その後「角柱と円柱」へと進むが，さらなる理解の深まりを期待し，ここで２時間かけて，関数の考えで立方体を比較し考察することにした。

まず，白い工作用紙で作った１辺が４㎝の立方体を子どもに提示し，立方体の定義の確認をした。その後，次のように問いかけた。「ここで問題です。この立方体をいくつか使って，もう１サイズ大きい立方体を作りたいと思います。この立方体が何個あると，１サイズ大きい立方体ができますか。」子どもは口々に，「２」，「４」，「８」という３種類の答えを言う。そこで，まず「２つ」と答えたＵに，教卓の所で基になる立方体を組み合わせて１サイズ大きい立方体を作るように投げかけた。Ｕは，２つ並べた段階で「あっ，だめだ。」と言った。見ている子どもたちもうなずいた。続いて，「４個」と答えたＨがみんなの前で組み立てた。他の子どもは，それをじっと見つめていた。４個では１段しかできないことがわかった子どもたちは，「８個だ。」と大きな声で言った。

１辺	１面	全体
2	4	8

表５　立方体の特徴

基になる立方体を使って，１サイズ大きい立方体を作るには，全部で８個必要になることを実際に積み重ねて確認した。ここで，新たにできた立方体の１辺や１面，全体の個数を，基になる立方体を１として表すことにした。そして，右の表５を完成させた。

その後，「手品をします。」と言い，１サイズ大きい立方体（基になる立方体８個分）の形を変えずに両手ではさみ，横に置いておいた箱に入れた。しかも，入れる瞬間に「ポチャン！」と言った。わざとらしいが，変化したことを子どもにとらえさせるためである。そして，あらかじめ箱の中に入れておいた全面が赤色に塗られた１サイズ大きい立方体（基になる立方体が組み合わさったとわかるように，基になる立方体の境目に線が入っている）をゆっくりと取り出した。

そして，子どもにこう問いかけた。「この大きい立方体を作っている基の立方体は，それぞれ何面に色が塗られたことになりますか。」子どもは，きょとんとしていた。その後，自信なさげに，「３」，「４」，「８」というつぶやきが聞こえた。この３つの数を板書した。そして，それぞれの数の意味を子どもに問いかけた。すると，以下のような発言があった。

８；「基になる立方体は８個で，そのすべてに色が塗られたからです。」
４；「一つの面には，基になる立方体が４つあるからです。」
３；「基になる立方体を一つ取り出してみると，塗られた面は３面だからです。」

基になる立方体の個数(個)			
１辺	１面	全体	３面※
2	4	8	8

※３面に色が塗られた立方体
表６　２×２×２の立方体の特徴

もう一度質問の言葉をゆっくりと繰り返した。「３」に納得した子どもが多かったが，まだよくわからない子どももいた。そこで，事前に用意しておいた基の白い立方体の３面だけを赤色で塗った立方体を，１サイズ大きい立方体の横に置いた。そして，立方体を一つだけ取り出したように提示し，３面が塗られていることを確認した。その後，表５に追加をして右上の表６を書いた。

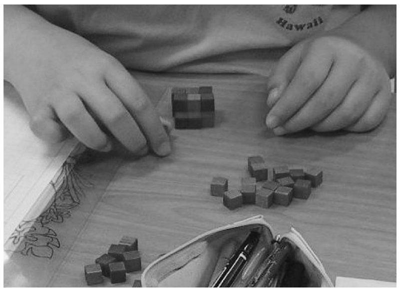


図７　１㎤の立方体を並べて考える子ども

続いて，「では，もう１サイズ大きい立方体を作るには，基の立方体はいくついると思いますか。これから４人グループになり，黒板の表の続きを書きましょう。」と投げかけた。そして，１辺が１㎝の立方体が入った封筒を各グループに渡した。実物があるので，子どもは右の図７のように，実際に１辺に基の立方体を３つずつ置き，数を確認しながら左の表８を埋めていった。

基になる立方体の個数(個)			
１辺	１面	全体	３面※
2	4	8	8
3	9	27	

※３面に色が塗られた立方体
表８　３×３×３の立方体の特徴

ここで，また「手品をします。」と言い，基になる立方体27個を両手ではさみ，また「ポチャン！」と言いながら横の箱に入れた。子どもは，また赤色に変わると思ったらしい。わざと頂点の赤の部分だけを先に見せたが，その後，ゆっくりと３色に塗られた立方体を見せた。子どもは，色が変わったことに驚いた。そこで，「赤い色，つまり３面に色が塗られた立方体はいくつあります

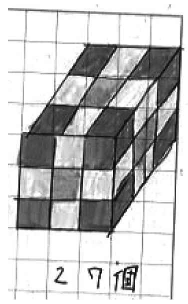


図９　子どもがかいた見取り図

か。」と尋ねた。ここでは，多くの子どもが手を挙げた。そして，「８個。」と答えた。

次に，「では，緑色，つまり２面が塗られた立方体はいくつあるでしょう。また，黄色，つまり１面が塗られた立方体はいくつあるでしょう。」と言った。子どもは，教卓の模型を指差して数え始めた。中には，右の図９のように自分で立方体の見取り図をかき，それに赤，緑，黄色を塗って数え始める子どももいた。

しかし，模型を見ても，見取り図を見ても，後ろの３面は見えない。正しい答えを求めるには，見えない面のイメージが必要となる。２面に色が塗られた立方体の数を正しく求めることは難しかった。一つの面を見た場合，赤く塗られた立方体は４個あり，赤色が塗られた立方体は合計８個ある。緑色も一つの面を見た場合４個あるので，赤色と同様に８個と考える子どもがいた。また，一つの面に緑色は４個あり，それが６面あるので24個と考える子どももいた。実際にMがみんなの前で２面が塗られた立方体の数を数えると16個だった。そこで，今度はペンで印をつけながら確認した。すると，２面，つまり緑色が塗られた立方体の数は12個だった。

続いて，１面，つまり黄色が塗られた立方体の数を確認した，これは，１面に１個ずつなので，すぐに６個とわかった。みんなが安心した時に，Kが，「見えない立方体がある。」とポツリとつぶやいた。全体の前で指名すると，Kは「色が塗られていない立方体があります。」と答えた。聞いていた子どもは，「うんうん。」とうなずいたり，「えー。」と驚いたりした。そこで，再度，基になる立方体27個を組み立てて確認してみると，中に一つだけ色が塗られていない立方体があることがわかり，子どもたちは，「本当だ。すごい。」と納得した。これらのことを右の表10のようにまとめた。

基になる立方体の個数(個)			色が塗られた立方体の個数(個)			
１辺	１面	全体	３面※	２面※	１面※	０面※
2	4	8	8			
3	9	27	8	12	6	1

※３，２，１，０面に色が塗られた立方体

表10　３×３×３の立方体の特徴

その後，色が塗られた面ごとの立方体の個数が正しいかどうかを確かめる方法を尋ねた。すると，Aは，「３面と２面と１面と０面をたすと27個になります。」と言った。実際に，８と12と６と１の和が27になることを確認した時，子どもから歓声が上がった。これで子どもは，この表を正しいととらえることができた。ちょうど，ここで１時間目が終わった。

２時間目。さらにもう１サイズ大きい立方体を作ると，基になる立方体は何個必要か尋ねた。子どもは，１辺が１㎝の立方体を４個ずつ並べて考えたり，４×４×４の計算をして64を求めたり，図をかいて考えたりしていた。なお，グループに配った封筒の中の立方体の数は，64個に満たないようにした。この意図は，すべてを並べて数えるのではなく，数が足りないからこそ規則性に着目したり，自分で見取り図をかいて見えない面を想像したりするなど，念頭操作による活動をしてほしかったからである。子どもは表11のように，表の左側はスムーズに埋めることができた。

基になる立方体の個数(個)			色が塗られた立方体の個数(個)			
１辺	１面	全体	３面※	２面※	１面※	０面※
2	4	8	8			
3	9	27	8	12	6	1
4	16	64				

※３，２，１，０面に色が塗られた立方体

表11　４×４×４の立方体の特徴

次に，色別の立方体の個数を確認するために，また「ポチャン！」と言いながら大きな立方体を箱に入れた。今度はどんな色の塗り方になるのか，子どもは箱から出てくる立方体を真剣に見ていた。筆者は，図１の一番右側の立方体を取り出した。予想どおりという表情をした子どもは，色が塗られた面の数ごとの立方体の個数をすぐに探そうとした。でも，やはり２面はなかなか難しく，困った様子の子どもが多かった。その後，２面については，また全員で模型に印をつけて実際に数えた。他の面は子どもが考え，表12を埋めた。

基になる立方体の個数(個)			色が塗られた立方体の個数(個)			
１辺	１面	全体	３面※	２面※	１面※	０面※
2	4	8	8			
3	9	27	8	12	6	1
4	16	64	8	24	24	8

※３，２，１，０面に色が塗られた立方体

表12　４×４×４の立方体の特徴

続いて，さらにもう１サイズ大きい立方体（５×５×５）を考えた。ここまで来ると，ほとんどの子どもは規則性で考えたり，計算で求めたりするようになっていた。そして，表13のように表を埋めながら求め方やきまりを考えていった。

1辺	1面	個	3面	2面	1面	0面
2 × 2×2	4 ＝	8 ＝	8			
3 × 3×3	9 ＝	27 ＝	8 ＋	12 ＋ 4×3 ×2	6 ＋ 1×6	1 1×1×1
4 × 4×4	16 ＝	64 ＝	8 ＋	24 ＋ 8×3 ×3	24 ＋ 4×6	8 2×2×2
5 × 5×5	25 ＝	125 ＝	8 ＋	36 ＋ 12×3	54 ＋ 9×6	27 3×3×3

6面

大きな立方体の１面に，１面色が塗られた基の立方体の数

大きな立方体の１面に，２面色が塗られた基の立方体の数

表13　子どもたちが見つけた立方体の数の特徴

5　考察

ここでは，この教材において「関数の考え」が立方体の特徴の理解の深まりにどのようにつながったかを考察する。

⑴　本教材における「関数の考え」

この教材は，発展的な内容になる。基になる立方体が組み合わさって大きい立方体ができるということは理解できても，塗られた面の数ごとに基になる立方体の数を求めることは難しさがあった。しかし，「ポチャン」と言って色が塗られる状況を演出したことや，色が塗られた面を視覚的にとらえられるように，赤，緑，黄色の色を塗ったことで，子どもはこの課題をとらえることができ，解決が進んでいった。それでも，２面に色が塗られた立方体の数を求めることは難しかった。実際，数え間違いをしている子どももいた。子どもは，自分で見取り図をかいたり，数が足りないので途中まで積み重ねた立方体をもとに念頭操作をしたりしながら，見えない裏の３面をとらえ，色が塗られた面の数を考えていった。そして，表13にあるように，理由や根拠を明らかにして色が塗られた面の数ごとに立方体の数を求めていくことができた。

この学習中，毎時間，授業の終了間際にノートに感想を書かせた。「関数的な考え」を導入した２時間続きの授業後の感想には，次のような記述があった。

Ｔ；「だいたいのきまりはわかった。でも，数が大きくなるにつれてものすごく考えなければならないほど難しかった。この表や図がなくて，文章だけで答えを求めるのは大変だなあと思った。」（下線は筆者が記入）

Ｎ；「最初，自分で思っていた数と違うのでたくさん考えた。立方体の数は増えるたびにいろいろ出たり，いろんな考えが出たりした。上の表（表13）では，２面は12を基本にして，一つ増えるたびに２倍，３倍されていた。やっぱり２面は一番難しかったが，どうしてもわからなければ，２面以外の個数を出して，全体の個数からひけば求められることがわかった。いろんなきまりがあり，おもしろかった。」（下線は筆者が記入）

２人とも単に答えを求めて終わるのではなく，「きまり」を考えながら答えを見つけようとしたり，すでに求めた答えから「きまり」を見つけようとしたりしていたことがうかがえる。

確認すると，26人中21人（約81％）が「きまり」という言葉を用いて感想を書いていた。この「きまり」は，1サイズずつ立方体を大きくしていった場合の合計の個数や色別の面の数という対応の規則性にある。これは，関数の考えである。

その後，柱体の学習をした。三角柱，四角柱，五角柱，六角柱，円柱の底面の形や数，辺の数や面の数などを求め，表にまとめる際，子どもは「きまり」を発見しようとした。休憩時間になっても表が書かれた黒板の前で「きまり」を説明しようとする子どもや，授業中に求めることができなかった「きまり」を家庭学習で見つけてきた子どももいた。

⑵　「関数の考え」と理解

実際，授業中の子どもの発言を取り上げてみると，次のようなものがある。

Ｗ；「３面に色が塗られた立方体は，どんなに立方体が大きくなっても８個です。それは，これは立方体の頂点の数を表しているからです。」

Ｒ；「１面に色が塗られた立方体の数を求めるには，まず一つの面を見た時の１面しか塗られない立方体の数を求めます。次に，面の数が６個あるので，それを６倍してやります。」

子どもが見つけた「きまり」の説明には，立方体の構成要素が含まれていた。また，グループで解決している最中のつぶやきからも，子どもは塗られた面の数と頂点や面の数などの構成要素を関連付けて考えていたことがうかがえる。ただ「立方体の頂点は８個で，面は６つ」という知識的なとらえ方ではなく，頂点は８個だから常に赤（３面色が塗られた立方体）は８個であることを具体物の操作や念頭操作でとらえていた。また，表13のように，立方体の１面の黄（１面色が塗られた立方体）の数×６で，全体の黄の数を式化して求めることができた。関数の考えをすることで，子どもは改めて立方体の頂点や面，辺に子どもは着目し，その意味を納得のいく理解へと深めていった。

さらに，自分一人で数や「きまり」を求めることは困難でも，友達の説明を聞いてその「きまり」の意味や，他の立方体の場合についても当てはまるか考えることは，自分の考えを広げ，深めることにつながっていった。

なお，単元後に行った市販のワークテスト（知識・理解；50点，表現・処理；50点）のクラス平均は87.5点であった（全国平均は81点）。面の形を問う設問では，クラス平均は92.3％で全国正答率は81％。辺の数を問う設問では，クラス平均は88.5％で全国正答率は87％。頂点の数を問う設問では，クラス平均は96.2％で全国正答率は91％だった。この３題に関しては，クラス平均が92.3点で，全国正答率を６ポイント上回った。このことからも，立方体の理解も深まったことがわかる。

６　今後の課題

単元後の感想に，自分は算数（図形）の勉強が嫌いだったが，今回，算数（立体）の勉強をして，嫌いが「普通」になったと書いた子どもが２人いた。活動だけでなく，「きまり」を謎解きのように考えることで，子どもは楽しさをつかんでいったから，「嫌い」から抜け出たのである。「算数好きな子どもの育成」は，筆者の算数授業の主目標なので，これからも力を入れていきたい。

また，本研究の教材のように，多少難問でも，課題提示の仕方を工夫することで視覚的に課題をとらえたり，実物を用いて活動することで考えの拠り所にしたりして，考えを深めていけることがわかった。子どもが見つけることができる「きまり」が含まれ，そして，表に表すため，あるいは表すことによって，筋道立てて考える能力や，論理的な考え，つまり，数学的な考え方を育むことができるような教材開発の必要性を感じる。どの学習でも，追究意欲を高め，数学的な考え方を育む「よい課題」の開発が求められる。今後とも，教材の開発により一層力を入れなくてはならない。

「関数の考えの育成」は，毎時間毎時間の積み重ねが大事になる。前述のように，子どもが「あれ，不思議だな。」と思う教材の開発はもちろんだが，単に答えを求めて終わりではなく，どうやってその答えを求めたかを考えていく授業展開が求められる。また，誤答の背景をみんなで考えるなど，考え方を高める授業を今後も展開していく必要がある。さらに，「きまり」の活用も重要となる。そうすることで，さらに算数好きな子どもが育っていくと考える。

引用・参考文献

古藤　怜．(1990)．図形は何のために，何を教えるべきか．新しい算数教育，東洋館，*10*，pp. 16-19.
田渕喜之．(1991)．直観力を生かし，論理的な思考力を育てる図形指導－指導方法のポイントを求めて．日本数学教育学会誌，*73*，4.
原修・澤井康郎ほか28名．(1991)．論理的な思考力を育てる図形指導の研究－具体的操作から，念頭操作へ．日本数学教学会誌，*73*，4.
今崎　浩．(2002)．算数科教科書の図形領域に見られる記述の特徴－図形の性質などを導くための根拠と論理に焦点を当てて．日本数学教育学会誌，*84*，6.
夏坂哲志．(2007)．チリの先生による授業－６年：立方体はいくつ？．算数授業研究，*51*，筑波大学附属小学校算数研究部，東洋館出版.
小学校学習指導要領解説算数編．(1999)．文部省．東洋館出版.
みんなと学ぶ小学校算数６年上．(2005)．学校図書.