教育実践研究　第16集（2006）　65－70

［算数・数学］

「式利用の図式」を活用した「図形の見方・考え方」を豊かにする授業の開発

－中学校第２学年「図形の性質の調べ方」の授業構想－

黒田　　匠*

１　問題の所在と本研究の目的

⑴　これまでの授業にみられる生徒の様子と問題点

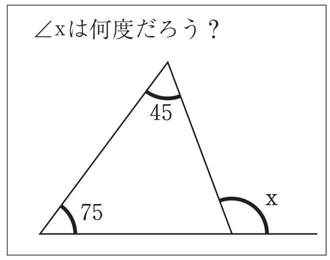


図１

図１において「∠ｘは何度だろう」と問うた。生徒はこの問いかけに競って答え，友達より早く答えられたことを素直に喜ぶ様子が見られた。75°を70°にしたりし，別の数値をこの場面に適用していると，間もなく，幾人かの生徒がｘは２つの内角の和に等しいことに気付き，教室は盛り上がった。自分が既に理解していた図形の性質，三角形の内角の和が180°であることを利用してｘの補角を求める方法以上に，「45＋75」という式が，問題解決に実に有効であるということを生徒達は感じた。しかし，驚きを伴って学習をすすめたはずが，数時間後の授業では，同様の問題場面において多くの生徒がたすことをしなくなり，式が示す新たな図形の見方が生徒の中になかなか定着しない様子がみとれた。

反対に，図形の学習であるにもかかわらず式だけが学習の対象となり，図形の見方・考え方が疎かにされた学習に陥りがちな場面もある。多角形の内角の和を求める学習では，とかく内部にできる三角形の個数を教師が尋ねるなどして誘導し，問いとそれに対する答え方を形式化して覚えることで済まされることがある。

このように，図形の見方と式による見方とは大いに関わるものであるにもかかわらず，図形の学習が図形と式の一方に片寄った学習としてすすめられることが少なくない。図形の学習と数式の学習を連動させることで授業改善を図れないかと考えた。

⑵　目的

黒田（2004）は，中学校一年における「正の数・負の数の計算」「文字と式」の学習を題材として，生徒は計算そのものに「答え」「答えを出すもの」としての意識はあっても，「式」「関係を表すもの」としての意識はもてずにいることを指摘しながら，事象，式，変形された式の三者関係が上手く機能した授業設計は，生徒が式の見方を高める学習を提供できることを示唆している。本研究は，数と式の領域において黒田が得た知見に基づき，生徒の式の見方を高める授業設計を図形領域においても取り込もうとするものである。生徒が自分の考えに基づく図と式を作りあげ，図と式の関係性を生徒が考察することで，個々の図形に対する見方・考え方が豊かになる学習を実現しようとする試みである。

２　研究の構想

⑴　式利用の図式

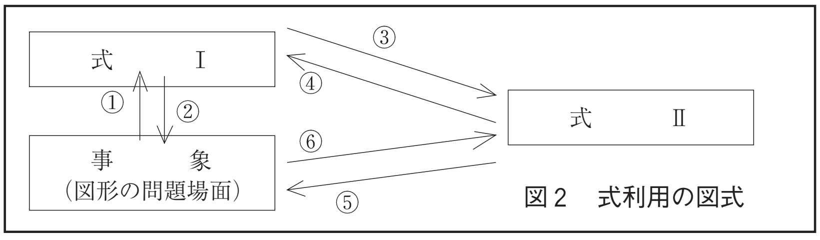


図２　式利用の図式

①式で示す（式づくり）
②式を読む
③式変形
④式の比較
⑤式を読む
⑥公式としての利用

三輪（1996）は，式を「表す」「変形」「読む」の３つがサイクルをなしている「文字式利用の図式」を提起した。三輪の図式と，それを数と式領域の学習への適用を考え岡崎（2003）が提案した「代数的思考のサイクル」とを参考

＊ 上越市立城西中学校

にし，本研究では，主に事象と式との関わり，式と式との関わりを検討して図に位置づけ，それを「式利用の図式」と呼ぶことにした（図２参照)。三輪，岡崎が提案した①→③→⑤のサイクルとしての流れに，指導上留意すべき点を明確にするため②，④，⑥の逆向きの働きを付け加えた。生徒が事象（図形の問題場面）を数や数式で考えたり（図２①)，逆に数や数式を事象で読んだりするよう仕組んだ（図２②)。また，数や数式を別の数式に置き換え（図２③）をし，新たにできあがった式ともとの式を比べながら式そのものを考え直した（図２④)。更に，変形した式で再度事象（図形の問題場面）を考え直し（図２⑤）た後に，生徒が身近な式として他の場面を適用する（図２⑥）ことを検討した。

⑵　式の見方が高った状態と図形に対する見方・考え方が豊かになった状態

本研究で述べる，式の見方が高まった状態とは，式を学びのための道具として使いこなすことができている状態を指す。具体的には，次のⅰ）からⅲ）の３つを指す。ⅰ)．項としてまとまりを理解し，式を操作としてでなくそれ自体を一つの対象として構造的にみることができる状態，そして必要に応じて操作的にみて，利用できる状態，ⅱ)．「＝」の意味・役割を十分に理解しながら式を利用できる状態，ⅲ)．ⅰ）やⅱ）を通して，生徒が活動する中で自ら式を定義づけたり，式を組み合わせたり，式変形することのよさを実感したりし，式の仕組み自体を学びの対象としながら利用できる状態であること。

本研究で述べる，図形に対する見方・考え方が豊かになった状態とは，扱う図形や図形の問題場面に潜む美しさを実感し学習する楽しさを生み出している状態，図形の関係性の認識がより確かになった状態，論理のつながりを学び因果関係の理解が高まった状態を指す。本研究では，特に，図形の関係性を式に表現することにより，多様性と本質性があらわになることをねらっている。

⑶　用意した学習場面と問題

研究の対象として，第二学年「図形の調べ方」の単元にある，小単元「平行線と多角形」の８時間分の学習を選んだ。理由は，図形領域の学習でありながら，課題解決のために式の扱いを必要とする場面が数多くあると教授経験から考えたためである。図形の問題場面の中で具体的につくりあげた式を意味づけたり筋道立てて表現したりすることで論理のつながりを学ぶことができ，図形の本質性に迫れると考えた。また，時には必要に応じて式を変形し，図の変形という視覚的変化と対応させ理解していくことで多様性を見出すことができるものと考えた。

本研究における授業設計は，角度を求めるために式をつくり，つくりあげた式を学びの対象に高めつつ，図形の本質的要素を浮かび上がらせようとするものである。問題場面は，小学校から慣れ親しんでいる三角形の内角の和が180°であることを活用し，三角形を自分なりの考えに基づいて見いだし解決を図ることができるものを用意した。

⑷　授業にのぞむ教師の構え

問いに答えようとする生徒の心理の中に絶対的な教師の存在が入り込むと，数学を教師と生徒がともに創出しようとする授業にはならない。式を活用できるばかりではなく，生徒が自ら学ぶ意味や価値を見出してこそ，見方・考え方を深めようとする主体的な態度も実現される。この点を，湊（2002）が述べる授業三型論に基づき，問答型の授業から自力解決・討論型の授業に教師が変えていくことで達成し，生徒の成長を助ける学習活動としたい。なお，生徒は「数学を構成する主体者」として本研究では位置づけた。

３　授業の実際

⑴　式の操作的な見方・構造的な見方を意識した問いかけの必要性（第３時）

ー第３時の課題は，小学校の学習を受け，三角形の内角の和が180°であることを利用し，外角の性質を理解・活用できること。問題解決に三角形の内角の和が必要であると感じた後の第４時は，三角形の内角の和が180°であることを証明し，論理的な道筋をつけて外角の性質までを整理し直すこと。尚、第１時、第２時の課題は、対頂角や平行線の性質について理解を図り活用することー

前年まで，前述１⑴の課題１において，45°を改め「ａ°」として「∠ｘは何度だろう」と生徒に問うた時，「ａがわからないと答えが出せない」という生徒の反応が目立った。そこで，生徒の式に対する見方を考慮して問い，式が示す新たな図形の見方を生徒の中に定着させようと考えた。

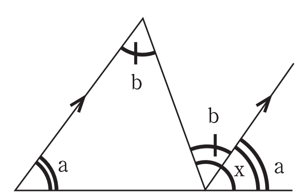


図３　平行線の性質と「ａ＋ｂ＝ｘ」

角の大きさを生徒に求めるよう指示する際，問い方は順に次の３通りが考えられる。アの方がより構造的な式の見方を生徒に要求している問いかけであり，逆にウの方が操作的な式の見方しかできない状態でも答えられる問い方である。

ア）∠ｘの大きさは何度だろう？

イ）∠ｘの大きさは（ａを使った式で）どう表されるかな？

ウ）∠ｘは，どんな計算で求められるだろうか？

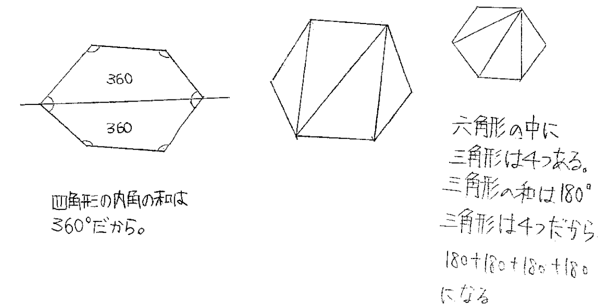
式の見方がまだ高まっていない生徒がいることをみとり，構造的な式の見方ができない生徒も考えられるように，「∠ｘはどう表されるか？」と問うた。「ａが分からないと答えられない」と述べる生徒は少なく，「ａ＋45でしょ。えっ，式でいいんでしょ，先生…。」と反応するなど，大半の生徒が答えることができた。また，「ａ」につまずきを感じた一部の生徒には，「∠ｘは，どんな計算で求められるかってことだよ」と問い，「ａ＋45だ」という了解をもらった。生徒の式の見方を意識して問いかけることで，外角の性質に対する生徒の理解に手応えを感じた。第４時では，式で考えたことに，図３のような図を充てながら論理的な道筋を整理し，図と式を対応づける本研究実践の導入とした。

⑵　「式利用の図式」の利用：場面１（第５時）

ー第５時の課題は，多角形の内角の和を三角形の内角の和を利用して求める方法に気付き，活用できることー

①　式をつくり，式を考察して図をとらえ直すこと

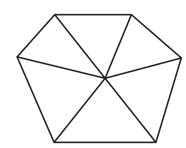
「六角形の内角の和はいくつか，求める方法をプリントに図と式で示そう。ただし，計算した場合，筆算は消さずに残そう。」と問い，これを問題１とした。小学校でも学習されていることが多い問題だけあって，ほとんどの生徒がＡ，Ｂどちらかを利用して720°を求めることができ（図４：Ａ，Ｂ参照），解決方法が問題となった。黒板に生徒が述べた２パターンの式を記述し，そこでは敢えて考え方を図で示すことはせず，式を考察の対象とした。



Ａ：360＋360　　Ｂ：180×４または180＋180＋180＋180

図４　六角形の内角の和

Ａの生徒は，720°はすぐ求めることができたと述べ，180の和を繰り返すＢの方法にあまり好意がもてずにいた。しかし，四角形が二つの三角形に分割できることは経験的に知っていたため，誤ったやり方であるという意識は全くなかった。机間巡視で得られた様子から「角度がわかっている図形ができるように，（ノートに描いた）図の中に線を入れたところは同じだね。でも，式は大部違うね。」と式の比較を促す発問を生徒に返した。生徒は「360°の中に180°が２つあるから同じようなものだ」「720°になるから。意味は同じだ」と反応した。そこで，「360＋360＝(180＋180)＋(180＋180)」と板書し，生徒は納得した。Ａで求めた生徒も180という単位量を意識し，Ｂの考え方との関係性を感じた。



Ｃ：180×６－360

図５

②　式を読むこと，比べること

180°という単位量が共有されたところで，過去に同じ問題に取り組んだ時にみんなの先輩が答えた式だとして，「180×６－360」を式Ｃと名付けて紹介した。Ａ，Ｂ，Ｃ，三通りの式について「式ができるもととなった図をそれぞれ探しあて，描いてみよう」と投げかけた。生徒はＡ，Ｂを容易に図示することができた。しかし，Ｃを図示できたのは，わずか５名であった（図５参照）。生徒はＣを考える際，盛んに六角形の中に三角形を６個つくろうとしていた。そして，360°を位置づけることができずに悩む様子が見られた。気付いた生徒がＣを図示すると，「そうだ」と述べ，「難しい。でも，こういうの，おもしろい」「さっきは，図の中に四角形があるのかと思った」とした。生徒は「三角形の内角の和をもとにして大きさを量っている」とする思いを実感を伴ってもつことができた。それと同時に，「どんな図であるかあてる」というゲーム感覚が生徒に意欲をもたせ，主体的な態度を生んだ。教師が，「ところで，Ｃの図はＡやＢとだいぶ違うね。式どうだろう。」と問いかけた。生徒は，「多分同じ」「360を180が２個とすればいい」「三角形４つ分には変わらない」とした。ここで，質的に変わらない部分を生徒の発言により確認できた。教師が改めて図６のように板書し，共有した。

180×６－360
＝180×６－180×2
＝180×４

図６　板書

⑶　「式利用の図式」の利用：場面２（第７，８時）

ー２時間の課題は，平行線の性質と多角形の内角・外角の和を活用し，図形の見方・考え方を高めることー

①　図と図，式と式の比較にみる整理・統合

図７の問題２で，∠ｘの大きさは何度か問うた。図に線を付け足しながら考え，行った計算があれば消さずに残すように指示した。必要であれば図に線を付け足しても構わないとした。

まず，多くの生徒が記していた式，『180－45－60＝75，180－75＝105』を用いて考えていた生徒Ａに，図と式を紹介してもらった（図８参照）。全く同じだと数名の生徒が賛成する中，「別の図ができた」と，生徒Ｂ，生徒Ｃが図９，

図10を黒板で示した。教師が「確かに図が違うんだな。」と述べ，「やり方はどうだろう」と問うた。「先生，（図10のように）三角形二個分の線が無くても，俺の（示した図）や，そっち（図９）みたい（に１個分）でもやってること同じ。」と生徒Aは指摘した。「やっていることって…？」と切り返すと，「線を延ばし三角形をつくっている」「三角形の内角の和を使って（求めて）いる」と反応した。生徒は式が同じであることを，同じ見方・考え方であることの拠り所として利用し，異なる図のようでも本質的に同じであることを式が示唆することを理解した。ここで授業が活発になり，生徒は，自分の式が友達と異なることや，違う見方・考え方をしていることなど，様々な思いを述べ始めた。

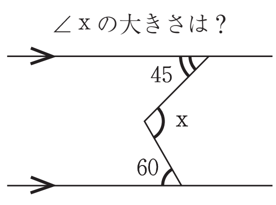


図７　問題２

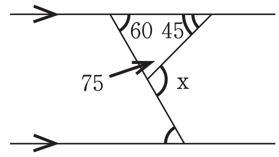


図８　生徒Ａの補助線

『180−45−60=75，180−75=105』の図

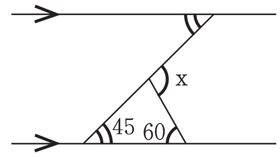


図９　生徒Ｂの補助線

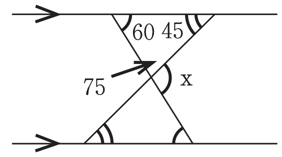


図10　生徒Ｃの補助線

図に線は引いていないものの，式だけ書いて答えを求めている生徒が何名かいた。それに該当する生徒Ｄは，式が『45＋60』であることを述べた。教師が「すごいなあ，こんなに簡単な式で求められるのか…」とすると，「（自分は）図はそれ（図８と同じ）だけど，式はＤさんと一緒で，45＋60になった。」と生徒Ｅが述べた（図11参照）。ここで，図が同じであるが式が異なることが指摘された。他の生徒は数秒考え，「そうだ，そう（いう式で）表せる」「外角（は他の２つの内角の和と等しいという性質）だ。足すやつだ」と納得した。そこで教師は「そうか。この図で45＋60になるのか…。」と確認の投げかけをした。

続けざまに生徒Ｆが「全く別のやり方でやったけど式が同じだ」とし，自分の見方・考え方を図12を使って紹介した。他の生徒は，その３本目の平行線を引くやり方の簡潔さに感心した。生徒Ｆの考えにより，式は同じでも図が異なることが指摘された。「でも，なんか複雑…」という生徒の発言からも，教師は明らかに整理する必要に迫られていた。

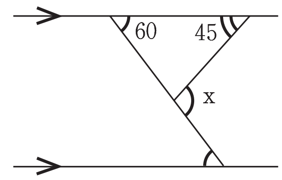


図11　生徒Ｅの補助線

『45＋60』の図

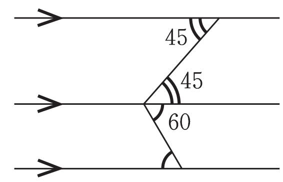


図12　生徒Ｆの補助線

教師は，生徒Ｅの外角を使う考えと生徒Ｆの平行線の性質を使う考えとの比較を行った。「ＥとＦの考え方は，何か共通点がないだろうか」と問うた。生徒Ｆ自身が，「同じじゃないけど，こっち（図11）もここ（図13点Ｐ）から平行線を引けばいい」と述べた。教師は，60°，45°になる角を確認し，生徒はその中で，外角の性質と平行線の性質を重ね「一緒だ」と述べた。ここで，この場面における解決のために二つの見方はともに有効であり、本質的には似たものであるという雰囲気に教室はなった。しかし、解決の仕方は最終的に似ているが，図が示すアプローチの仕方、見方・考え方は明らかに異なることをこの過程で実感した。

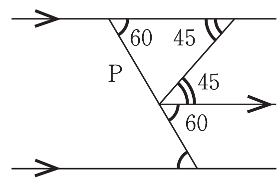


図13　生徒Ｅの補助線

次に教師は，図が同じであるという点から，図８で生徒Ａが示した式と，図11で生徒Ｅが示した式が同じであるかどうか，比較を促した。教師は「『45＋60』→『180−45−60=75，180−75=105』でいいか」と板書しながら問うた。生徒達は「よくわからない。けど，きっとそうだろう」と答えた。教師は，一方の式は短く簡潔なことを指摘し，後者の二つに分かれた式が一本にまとまらないか問うた。生徒Ｇは，二本目の「75」に一本目の式の左辺をあてはめ，180−（180−45−60）とした。教師は，この式もみんなが∠ｘの大きさの答えとして期待している105°になるかどうかを尋ねた。大半の生徒は括弧内を先に計算し，「なる」と答えた。しかし，生徒Eは「この式も計算していると45＋60がでてくる」と述べ，括弧の中を先に計算せずに括弧をはずした時のことを説明した。他の生徒は感心の声をあげ，式変形をすることが，見方・考え方をスッキリさせるということを少し感じることができた。そこで，教師は黒板に「180−（180−45−60）=45＋60」と記述した。その結果，ここで生徒に「じゃあ，みんなもしかしたら45＋60になるのか」という疑問が生じた。

②　式から図を拡張する

教師は，図15をただ１人描き式を記していた生徒Ｇに，「１人，みんなと異なる考え方をしているが，長い計算を上手く式にまとめてあるぞ。」とコメントを述べ，式を紹介してもらった。そこで，教室全体で生徒Ｇが描いた図を探る活動に取り組んだ。教室全体の半分程度が図を描き上げ，その多くが図14であった。しかし，生徒Ｇが「私のは

図が違うけどこれでも良いと思う」と，図15を示した。ほかの生徒は図14と見比べるなど，しばしの間の後，「本当だ。すごいなぁ」と声をあげている。

『180－(90＋60)＝30，180－(90＋45)＝45，180－(45＋30)＝105』の図

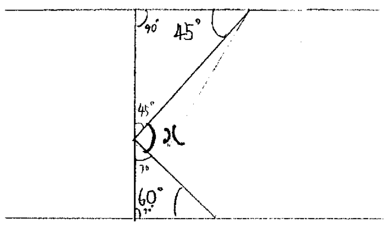


図14　多くの生徒の補助線

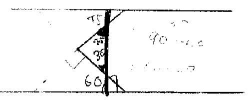


図15　生徒Ｇの補助線

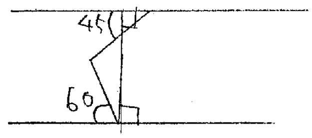


図16　生徒Ｆの２

生徒Ｆは，生徒Ｇのアイディアに触発されて「じゃあこれでもいい？…」と述べ，更に直角に交わる線を60°の角の頂点に移動させた（図16)。生徒は，なかなか理解できなかったが，確かになることを納得した。「∠ｘの頂点の位置を，45°の角の頂点の位置と併せて動かす（垂線の位置はそのまま)。」という発想へは展開しなかったものの，垂線の位置を動かした場合については、式は同じであることを確認した。このように一つの式に示されたアイディアは、図に多様性を見せてくれる可能性があることを生徒は理解した。

教師は，この『180－(90＋60)＝30，180－(90＋45)＝45，180－(30＋45)＝105』という式も，『45＋60』の仲間かと問うた。生徒は「複雑で，長すぎて分からない」と答えた。「これも，一本（の式）にすればわかるのかななあ」と述べる生徒のつぶやきに「じゃあ，手伝うから一本にしてみよう」と教師は述べ，みんなで取り組むことにした。

表１の過程を経て，生徒は『60＋45』の式でこの場面が代表されることを理解した。教師は，黒板に「じゃあ，これでいいか」と『180－(90＋60)＝30，180－(90＋45)＝45，180－(30＋45)＝105 → 180－{(180－(90＋60)＋45)}＝45＋60』と記し，生徒の納得を得た。

Ｔ：30がここ（一本目）とここ（三本目）にあるから…，
　３本目の30にこの長い式をはめてみよう…。
S1：なんか，はめるとかって（連立方程式の）代入法みたい…
Ｔ：そうか。－－そうそう，S2は上手だぞ，代入。カッコ使って。
S3：先生，こんなでいい？《180－((180－(90＋60)＋45)＝105》
Ｔ：次に，二本目の45ができる式を，三本目の45のところに
　はめるぞ。S1の言った代入法だ。
(S4：あっ，わたしんの（もう）できたみたい。《笑顔》)
Ｔ：そう，そう，上手，上手。さあ，仕上げだ。数字どうしを
　そうっとしといて，カッコだけはずしてみよう。
Ｓ：あっ，(60＋45に）なった。　　S1：おれもできた。
S2：先生，仲間です。

表１

その後教師は「45°が40°や58°に変わった場合はどうだろう」と問いかけ，生徒は「足せば良いだけだから，すぐできる」としている。生徒は，「解決方法もそれぞれ素晴しいし，一つの式で代表できるのもすごい」という気持ちになり，多様性と場面に共通する本質性を感じとった。

4　考察

(1)　「式利用の図式」を活用してみえた生徒の様子

①　式利用の図式における相互的な矢印の機能

３(2)の問題１：六角形の内角の和を求める場面では，図と数式を併せて考えたことが，生徒間で互いの見方・考え方を比べようとする気持ちへとつながった。答えとなる数値（720°）が同じであることが解決方法を比べようとする気持ちを生み，式の違いが図にどの様に現われるのかという疑問を抱きながら，生徒は違いを考えた。

考え方を最初に図示せずに式で考えてみたことで，単位量180°の存在など，図の中に潜む考え方の関係性を式により生徒は意識することができた。一見異なりそうな見方・考え方も，式をつくり，つくった式で問題場面を見直すことで（図式：①→②)，課題解決に必要な見方・考え方の本質にアプローチする気付きへと至る可能性がうかがえた。

更に，式についての比較から図についての比較や理解へと移行した時には，「180×６－360」や「(180＋180)＋(180＋180)」が「180×４」に等しいことなど，式を変形したり比べたりすること（図式③→④）がきっかけとなり，「多角形の内角の和は，三角形の内角の和をもとにして大きさを量っている」など，形式的な理解ではなく実感を伴って理解することができた。図形の見方が固定的な生徒にとってもこの学習過程は，「三角形４つ分には変わらない」など，本質性をより自然な授業の流れの中で確認るものとなった。また，360°の意味づけが，問題１において式

Ａを活用した場合と，式Ｃを活用した場合では異なる図形を活用していることを顕在化することができた。

② 式利用の図式におけるサイクルとしての機能

3⑵の問題２では，式を検討することで図を考え，図を検討することで式を考えたりした。生徒Ｅが示した式のように，同じ図から異なる式が生まれることや，図12の平行線の性質を利用した図のように，同じ式を考えても異なる図が考え出されることに驚きを感じた。徐々に生徒が式の比較を通して見方・考え方の相違に関心をもつようになった（図式①→③，図式④→②）。

また，自分や友達のつくった式が代表的な式（「45＋60」など）の仲間かどうか考えることにより，異なる図のようでも，本質的に同じであることを式が示唆することを知った。生徒Ｆが「同じじゃないけど，ここ（図13点Ｐ）から平行線を引けばいい」にあるように，本質を考察し，図に関係性を持たせる様子がみとれた。(図式①→③→④→②→①→…)。そして特に，「じゃあ，みんなもしかしたら45＋60になるのか」など，変形された式を図にあてはめ直した時に，見方・考え方をスッキリさせるということを経験するにいたった（図式①→③→⑤→⑥)。

更に，異なる図における，全く異なる式についても，考え方の妥当性が認められ，やがて式の変形や図の変形を通して他の考え方との関係性が見出されていくことも生じた。図が式になるだろうという思いをきっかけに，生徒間でつくった図を比べる活動が生じ，図を動的に変化させるなど互いのアイディアに触発され，図を拡張しながら学習が展開する様子が見られた（図式①→③→⑤→①→…)。

⑵ 式の見方の高まりと図形の見方・考え方の深まり

式の見方と図形の見方の相互的な高まりを意識して取り組んだこの授業設計は，問題２で垂線を動かしてみたり，外角の性質と平行線の性質をあらためて比べてみるなど，一見異なる性質を問題場面の中に取り込んで考察し，式を扱いながら図のもつ本質に迫っていける可能性がある。「どんな線を引いたか」,「どんな図形の性質を使ったか」などという，問題場面を解釈して図に依存しようとする意識から抜け，生徒は，見方・考え方が同じでも式が違ったりすることを経験したり，逆に式は同じでも見方・考え方が異なり異なる図ができあがる場合があることを経験したりすることで，式は図形に対するいろいろな見方・考え方に気付かせてくれるという思いに確かに至った。外角の性質と平行線の性質を重ねてみて，「一緒だ」と判断するなど，図の中から見いだされる考え方の素晴らしさと一つの式で表わすことができる場合もあるという気付きが生徒に生じた。

5 まとめと今後の課題

つくった式を変形し，比較する，そして場面に併せて再び式を読み見直すなど，式の操作を図形の学習に生かしていこうとする式利用の図式を活用した授業設計は，生徒が図形学習における図形の多様性と本質性に気付くことができる学習を提供できる可能性があることを確認できた。「式や図が同じであること」が，一つの見方・考え方への整理統合を生んだり，「式や図が異なること」が多様な見方・考え方に気付かせてくれることを生徒は経験した。式と式，図と図，図と式のそれぞれの比較に注目することが，図形の見方・考え方に目を向ける契機となることを本研究では確認できた。式操作が生かされる学習場面を単元の中に適切に位置づけ，式の学習と図形の学習を意図的に連動させていくことで，二つの学習が互いに高まりをみせる可能性がある。

図形の見方・考え方の高まりがどの様なことをきっかけに生まれてくるか，生徒個々のもつ見方・考え方のよさをどう認め合い伸ばすかなどについては，今後の課題となる。

引用・参考文献

岡崎正和 (2003)．全体論的な視座からの正負の数の加減の単元構成に関する研究－教授学的状況論と代数的思考のサイクルの視点から－，全国数学教育学会，数学教育学研究 第９巻，pp.1-13.

岡崎正和・黒田 匠 (2003)．算数の式から代数の式への転換を促す正負の数の乗除の単元の再構成に関する研究，日本数学教育学会，第36回論文集

黒田 匠 (2004)．ゲーム活動を取り入れた生徒の式の見方高める授業の開発－代数の導入過程としての，中学１年「正の数・負の数」の単元構成－．上越教育大学学校教育総合研究センター，教育実践研究 第14集，pp.45-50.

三輪辰郎 (1996)．文字式の指導序説．筑波数学教育研究，15，1-14.

湊 三郎 (2002)．授業三型論に基づく教師の数学的資質，上越数学教育研究，９，1-13.

岡崎正和 (2001)．全体論的な視座からの代数の導入過程に関する研究－代数的発想の生起の様相－全国数学教育学会，数学教育学研究 第７巻，pp.39-48.