

[算数・数学]

四角形についての認識を深める「敷き詰め」の活動

- 5年生「図形の合同と角」の単元において -

青木 弘明*

1 主題設定の理由

5年生において、長方形や正方形が平面に敷き詰められることは体験的に知っている。しかし、これがどんな四角形でも平面を敷き詰められるということに気づくならば、それはとっても不思議なことであり、「なぜ」「どうして」という疑問が生まれる。また、それを解決することで敷き詰めを美しいと感じるようになると考える。そして、一層図形感覚を豊かにするに違いない。

新学習指導要領では、「学ぶことの楽しさ」「考えることの楽しさ」が強調されている。図形領域でそれらの「楽しさ」を味わわせるには、ハンズ・オンといわれる手を使った活動が有効といわれる。低学年のうちには、何か教具などにさわり手を動かすことにも興味をもち、楽しいと感じる。ところが、高学年になると、ただ教具を与えておくだけでは、子どもたちは関心を示さない。子どもたちの知的好奇心を喚起する何かが必要とならなければならない。「あれ？不思議だ！」と思える『意外性』を感じさせる何かを潜んだ学習を設定する必要がある。

高学年の図形指導では、教具を使つての試行錯誤による予想もしなかった事象との出会いという『意外性』との出会いを重視していく必要があると考えている。

どんな三角形や四角形でも必ず敷き詰められるということは「敷き詰めの幾何」の理論もあるように明らかになっている事象であり、その体験をした子どもたちは『意外性』を感じるはずである。しかし、新潟県小学校教育研究会が毎年実施していた学習指導改善調査研究事業の結果を見ると、一般の四角形が敷き詰められると認識している子どもたちが少ないことに驚かされる。これは、授業中において敷き詰めの経験に乏しいことが原因と思われる。具体物を用いて実際に敷き詰めてみるといった、操作的な活動を大切にされた指導が大切である。

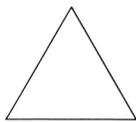
本実践の目的は、試行錯誤を伴う敷き詰めの活動を設定することによって、子どもの四角形に対する認識がどのように深まるかを、発言やノートの記述、活動の実際から考察することである。その目的を達成するために、「図形の合同と角」の単元において図形の敷き詰めに計画的に組織し実践を行うこととする。その実践の中から、敷き詰めの活動でどのように四角形の認識が深まるかを確かめ、敷き詰めの活動はどのように進めていったらいいのかの方法を探ることとする。

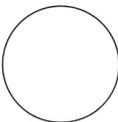
2 敷き詰めに対する県内児童の認識度と学習指導要領の扱い

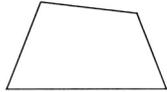
新潟県小学校教育研究会では、平成14年度まで学習指導改善調査研究事業を実施していた。平成12年度の5月に新潟県内第6学年抽出児童、約1,000人に実施された「全国標準調査 算数」¹⁾(問題は5年生の内容)の図形領域の調査結果²⁾で、ひととき正答率の低い問題があった。

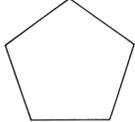
この問題は、ア～エの図形の敷き詰めの様子を念頭操作し、平面に敷き詰めができる図形を選ぶことができるかどうかをみる問題である。この問題でアを選択できた子どもは58% (全国通過率61%)であったが、ウを選択した子どもは32%と低かった。(全国通過率35%)「敷き詰めの経験に乏しいことが原因と思われる。今後は具体物を用いて実際に敷き詰めてみるといった、操作的な活動を大切に

合同な図形をならべて平面をしきつめることにしました。下の図形のうち、平面がしきつめられるかたちは、どれですか。ア～エの中から2つ選び、その記号で答えなさい。

ア


イ


ウ


エ


* 上越市立柿崎小学校

指導に当たりたい。」と考察があった。

小学校学習指導要領解説（算数編）³⁾では、C 図形（2）主な内容の解説d. 図形についての見方や感覚 イ 平面図形の敷き詰め の項に次のように記述されている。

平面図形を敷き詰める活動のねらいには、「幾何模様的美しさを味わうこと」、「平面の広がりについて理解すること」、「図形に関する性質を見いだすこと」などがある。

基本的な図形について理解する上でも、図形を敷き詰めたり、敷き詰められた図形を観察するなどの活動は大切である。

「幾何学模様的美しさを味わうこと」については、各学年で学習する基本的な図形を組み合わせたり、きれいな模様を作ったりする活動を通して、図形のもつ美しさを感得できるようにする。

「平面の広がりについて理解すること」については、各学年で学習する基本的な図形を実際に並べて敷き詰める活動を通して、平面の広がりについて理解したり、身の回りで図形の敷き詰めが使われている場面を見つけたりできるようにする。

「図形に関する性質を見いだすこと」については、例えば、形や大きさが同じ図形を敷き詰めたり、敷き詰められた図形を観察したりするなどの活動を通して、図形がもつ共通的な性質を児童自らが見いだせるようにする。これは、帰納的な考えの一例である。第5学年では、同じ形で同じ大きさの三角形を敷き詰める活動を通して、三角形の三つの角が一点に集まると、直線になるという性質に気付くことができる。また、同じ形で同じ大きさの四角形を敷き詰める活動を通して、四角形の四つの角の大きさの和が 360° になるという性質に気付くことができる。

また、教科書（学校図書）では、「四角形の敷き詰め」の活動が1時間扱いで組織されており、教科書の巻末には切って敷き詰める活動ができるパーツまでが準備されている。これだけ重要視されている内容でありながら、問題への子どもたちの理解度の低さ、そして指導する自分自身の敷き詰めの活動への理解の低さを反省した。

3 「しきつめの幾何」の原則と特徴（文献より）

先行文献を探していると「しきつめの幾何」⁴⁾という理論に行き着いた。この理論は、幾何教育の出発点を四角形と円におくという考え方である。そして、《分析要素→統合》という方向でなく、まず最初に総合図形ありきという立場をとる場合、たとえば、長方形や正方形が敷き詰められた床とか天井、そして障子などのような日常身近にある実例が、適切な素材として浮かび上がってくる。（図1）

さらに、平行四辺形・台形・たこ形・ひし形、そして一般の四角形によっても平面をしきつめることができる。（図2）

そして、このような敷き詰めの中には、その四角形のさまざまな性質がかくされている。そこで、これから、合同な四角形を平面にしきつめることによって、図形の諸性質を導き出そうという方向が考えられてくる。

つまり、「しきつめの幾何」とは、たとえば厚紙などで作ったいろいろな四角形、三角形を使って平面をしきつめていき、その操作過程や総合図形から四角形、三角形の分類、性質をはじめとする初等幾何の分野の学習をすすめるという方法および内容に対して名づけられた名称である。

このような試みに至った動機の一つは「一般の四角形で平面がしきつめられる」という事実である。これは「四角形の内角の和が 360° である」と等値であるが、あまり知られていないばかりではなく、すぐに納得されない。三角形の場合は、紙に書いたとしても、平行線を作っていけばわりあい簡単にしきつめられた図

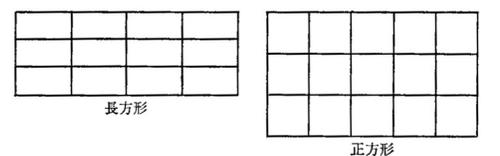


図1

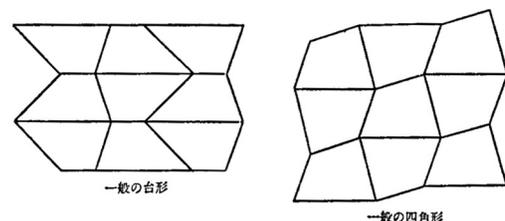
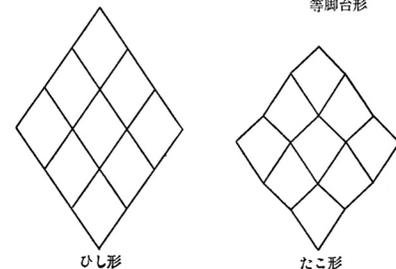
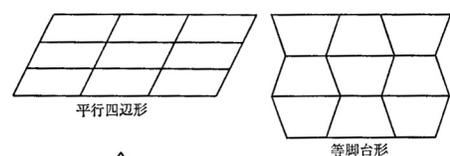


図2

が書けるが、四角形ではそうはいかず、合同な四角形をいくつも作り、それをしきつめて一目瞭然（実証）ということになる。

四角形は一般の四角形、一般の台形、等脚台形、たこ形、平行四辺形、ひし形、長方形、正方形の8つあり、その敷き詰め図は先に紹介したとおりである。また、三角形は一般の三角形、直角三角形、二等辺三角形、直角二等辺三角形、正三角形の5種類があるので、そのしきつめ図を紹介する。（図3）

以上のようなしきつめ図を、厚紙などで作った図形によって実際に平面上に構成していくことによってできる総合図形の中には、重要な初等幾何の内容の多くが《すでに》含まれてしまっている。その内容をひとつひとつ拾い出すことによって、自然に図形学習がすすめられるということになる。

「しきつめの幾何」の原理と特徴をまとめると、まず第1に、図形は総合的なものとして存在するとするのが自然であると考え、分析要素から総合図形へという方向ではなく、最初から総合図形として把握しようとする立場をとっている。そのために、モザイク模様風に平面をしきつめた図をしばしば用いることになる。

そして、第2に三角形や線分、角を出発点とするのではなく、私たちの日常身近に多く見いだすことのできる、四角形と円を幾何教育の出発点におくことである。

第3には、総合的な図形から単純な図形を抜き出すという方向を採用する。そして、補助線は「新しく人工的に引く」のではなく《すでに》総合図形の中に含まれているのであり、単純な図形を取り出してくるときの「足場」（取り払っていく建築のハリ）と考える。

第4に、合同な図形で平面がしきつめられてできる総合図形の分析から個々の図形の属性を実証したり、性質を発見したりする。

さらに、「しきつめの幾何」による図形学習では、紙で切りとった「ものの形」を扱うことが有効であるという考えから、次のような特徴があるといえる。

- 重ねることで合同が保証される。
- 紙の厚みは意識されず、平面だけが浮き出てくる。
- まわしたり、裏返したりなど自由に操作できる。
- 操作が簡単で、実証できていながら、意外性をもっている。

そして、これらの特徴は「楽しくて、わかる授業」の条件をみたしてくれるものでもある。また、しきつめの具体的操作の中には、回転、平行移動、裏返しなどが含まれていて、操作そのものをも学習対象にしうる可能性があるとも考えられる。さらに、低学年におけるジグソーパズルを利用した図形学習などにも応用されているし、今後も「しきつめの幾何」の立場からの幅広い実践が期待できる。

この「しきつめの幾何」の考え方は今から約20年も前の1982年の全国数学教育研究大会で提唱されたと聞いている。この20年前に提唱された考え方は、新学習指導要領算数科の目標の中に新たに含まれた、「算数的活動」「活動の楽しさ」という部分に直結する理論であると考えた。

4 研究内容

(1) 敷き詰めの意味を考えた活動を組織する

5年生において、長方形や正方形が平面に敷き詰められることは体験的に知っている。しかし、これがどんな四角形でも平面を敷き詰められるということに気づくならば、それはとっても不思議なことであり、「なぜ」「どうして」という疑問が生まれる。それを美しいと感じることになるはずである。そして、一層図形感覚を豊かにするに違いない。

そこで、探求的な敷き詰め活動を設定し、子どもの四角形に対する認識の深まりを、発言やノートの記述、活動の実際から考察する。

(2) 対象児童

長岡市立〇小学校 5年生41名（2クラス：男子26名、女子15名）

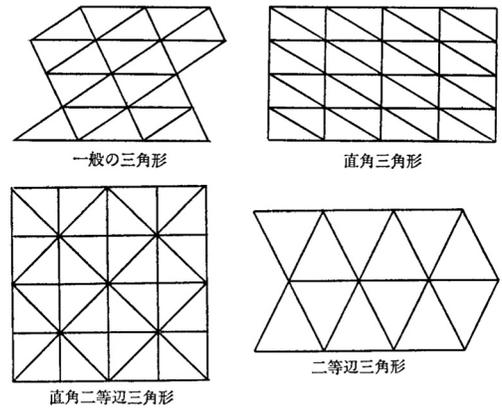


図3

5 単元の実際

(1) 指導計画（図形の角について※図形の合同を先に学習）

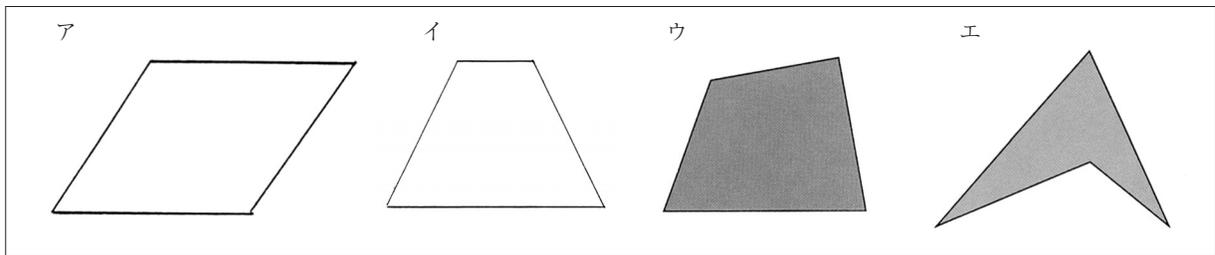
2時間	○ 四角形の敷き詰めを通して、四角形の性質を理解する。
1時間	○ 四角形の内角の和は、すべて 360° になることを理解する。
1時間	○ 三角形の3つの内角の和は、すべて 180° であることを理解する。
1時間	○ 多角形の内角の和の求め方を理解する。

教科書（学校図書）では、三角形の3つの内角の和は、すべて 180° であることを学習し、続いて四角形の内角の和はすべて 360° になることを学習する。そして、多角形の内角の和の求め方を理解し、最後に四角形の内角の和はすべて 360° になるということの確認のために敷き詰めを行う。

しかし、本実践では敷き詰め活動を通して、子どもたちの中から四角形の内角の和が 360° になるということを探求的に発見させたいと考えた。そこで、敷き詰め活動を最初に行い、敷き詰める四角形の数も教科書にある2つから4つに増やし、2時間扱いで行う。その後、四角形の内角の和は、すべて 360° になるという部分の学習をし、四角形の内角の和が 360° なので四角形を半分にしてできる三角形の内角の和は半分の 180° になるというふう「しきつめの幾何」の理論に従って学習を進展させていった。

(2) 学習の経過

① 課題提示



上の4つの四角形を提示し、敷き詰めができるか否かを予想させた時の子どもたちの反応を紹介する。

T : この4つの四角形の中で、同じ形だけで敷き詰めることができるのはどれでしょうか予想してみましょう。

C 1 : アは、向かい合っている辺の長さが同じで2組とも平行だからできそう。

C 2 : アは、平行四辺形で形が整っているからできそう。

C 3 : イは、同じ長さの辺を合わせるとできそう。

C 4 : イは、台形で平行なところがあるからできそう。

C 5 : ウとエは、辺の長さがばらばらだからできなと思う。

C 6 : ウとエは、2・3個だったらできるかもしれないが、たくさんになるとバラバラになると思う。

C 7 : エは、絶対敷き詰められないと思う。

C 8 : やって見なければ…。

このようにウとエについては意見が分かれた。

② 課題に取り組む

上記のやりとりの後に課題に取り組んだが、以下のことを配慮して活動に入った。

○ それぞれの形をたくさん印刷した画用紙を準備しておき、自分で選択して敷き詰めさせる。

○ 自分なりの課題をもって操作活動に入るようにさせる。

- ・アでいろいろな敷き詰め模様をつくってみよう。
- ・ウやエに挑戦してみようなど

○ 2時間扱いで活動の時間を十分にとり、一人一人が自分の発想を生かして楽しく算数的活動ができるようにした。

○ 工夫している点、調べてみたいことなど子どもの言葉で表現させ、アイデアのよさを認め、活動がさらに促進できるように働きかけた。

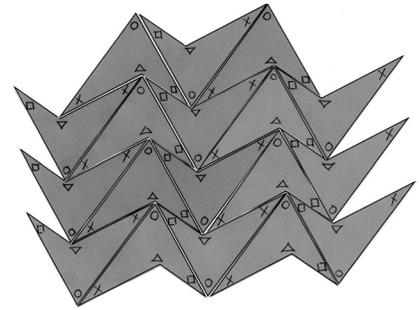
○ できるだけ多くの図形を敷き詰めさせ、平面の広がりに対する感覚を育てるようにした。

③ 敷き詰めたものを見合い、まとめる

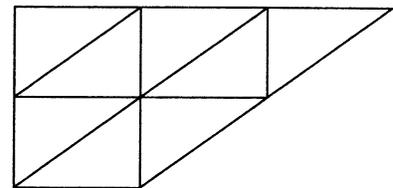
T : 気が付いたことを話し合ひましょう。

- C 9：4つとも敷き詰められたからびっくりした。
- C 10：模様がいろいろあってきれい。
- C 11：アとイは一直線に並んでいる。
- C 12：四角形の4つの角が一つのところに集まるようにすると敷き詰められた。
- C 13：ということは、四角形の4つの角を集めると 360° になるんじゃないか。
- C 14：四角形だったらどんな形でも敷き詰められそう。
- C 15：本当にどんな四角形でも敷き詰められるのかな？

ウとエの四角形を敷き詰めた作品の4つの角に○×△□などの（色分けした子どももいた）印をつけ、4つの角が1カ所に集まると隙間なく敷き詰められることを発見している子がいた。そのことをきっかけに四角形の内角の和にはきまりがありそうだとすることに着目していった。また中には、自分で別の四角形をつくり確かめる子どももいた。



エの四角形を敷き詰めた作品



三角形の内角の和は 180° の図

その後の三角形の内角の和の学習では、四角形の敷き詰めを経験を生かし三角形の3つの角のそれぞれに印を付け、1点に集めることで3つの角は一直線に並ぶということから三角形の内角の和は 180° であるということを確認している子が多かった。更には、三角形を敷き詰めていって、図形の広がりを楽しんでいる子もいた。その中で、直角三角形の敷き詰め図を見て「三角形は四角形半分だから角の合計も 360° の半分の 180° になるんだ」という発言があった。これまでの小学校の指導方法に、三角形の3つの角を切り取ってならば、三角形の内角の和が 180° であることを確かめさせるというものがあった。実際私も行ったことがある。この方法は、三角形の構成要素である角を切り取りバラバラにして考えるわけであるから、角の概念の混迷に拍車をかける危険性をはらんでいる。図形を切り刻み形をなくするのではなく、図形の連続模様から図形を総合的に見るということで、敷き詰めは効果的であったと感じる。

6 結果と考察

本単元は6月中旬から7月上旬にかけて実施した。実施から約3ヶ月後の10月上旬に、「全国標準調査 算数」と同じ敷き詰めの問題を「図形の面積」の単元の評価問題と合わせて実施した。アの正答率は98%（正解40人/41人）、ウの正答率は59%（正解24人/41人中）であった。調査の手続きが全く同じではないが、正答率だけの単純比較では、平成12年度県内第6学年抽出児童（約1,000人）の県正答率32%と当学年の正答率59%の平均値のt検定を実施した結果、有意差が認められた。

また、平成13年度の新潟県小学校教育研究会が実施した、学習指導改善調査研究事業（平成14年2月実施）の5年生の問題に「全国標準調査 算数」の問題と類似の問題が出題されている。「全国標準調査 算数」の問題から三角形を外し、一般の四角形が敷き詰められることを理解しているかに絞って出題されている。

翌年度5月に出された学習指導改善調査研究事業の報告書⁵⁾によるとこの問題の県の正答率は26.4%と極めて低いことが分かった。正五角形を選んだ誤答は55.0%で整った形ならば敷き詰められると考えがちであることが分かった。また、無答率も9.0%あったことから、敷き詰めるということ自体を理解していない児童もいることが予想される。いずれにしても、敷き詰め活動の経験不足が原因と言えよう。

当校5年生の同問題の正答率は63.4%（正解26人/41人）であり、無答率は0%であった。このことから、県正答率26.4%と当学年の正答率63.4%では敷き詰め理解に明らかに有意差があったと考察できる。

今回、敷き詰め活動は、「図形の角」

(18) 同じ形をならべて、平面をすき間なくしきつめます。下の㉗～㉓の図形のうち、平面をすき間なくしきつめることができる形は、どれですか。
1つえらんで、記号で答えましょう。

㉗	㉘	㉙	㉓

(33)	{	正26.4%	イ……………55.0%
		無 9.0%	ア…………… 9.0%
		誤64.6%	その他… 0.6%

学習指導改善調査研究事業 5年生算数の問題

の導入として設定した。図形に対する関心を高め、今後の学習内容の問題意識を高めるのに役立った。4種類の四角形を提示し、予想を立ててから敷き詰め活動に入ったが、すべての四角形が敷き詰められることが分かった子どもたちの驚きは大きかった。また、敷き詰められるかどうかということだけでなく、連続模様の美しさについても興味をもって取り組んでいた。子どもたちの操作を見ていると、初めは辺の長さだけに着目して、同じ長さの辺と辺を合わせて敷き詰めようとしていたが、やっていくうちに角を意識して敷き詰めていくようになっていった。試行錯誤しながらの操作で構成要素に着目できた点で大きな成果があった。

また、本単元の敷き詰め活動で発見したことは、その後の面積の学習で求積方法のアイデアとして生かすことができる。また、この活動によって図形の見方・考え方を豊かにし、学習や生活の場で活用することを期待している。

敷き詰め活動において、「敷き詰めてみたら、敷き詰められた」という『意外性』ということが、子どもたちの意識に強く残ったのではないかと感じる。しかし、学年末に行われた学習指導改善調査研究事業の問題では、選択肢の中に正五角形のような整った形が含まれると、そちらに目が奪われている子どもも少なくなかった。多角形の内角の和の学習時に「五角形は 540° だから敷き詰められないね」という気付きをもった子どもがいた。(実際には、五角形のホームベース形では互い違いにすることで敷き詰めは可能になる。また、正六角形〈サッカーボールの模様〉も敷き詰め可能) この子どもの気付きをもとに発展的に学習を広げていくことは可能であった。しかし、その気付きを共有し、相互作用の場へと導くための操作活動まで設定することができなかつた。本単元において、これだけの問題意識をもった子どもたちであれば、追究は可能だったように思う。せっかくの子どもの発想を生かしきれなかつたことは、大きな反省である。

7 おわりに

前述したように「しきつめの幾何」というものがある。いろいろな四角形、三角形を使って平面を敷き詰めていき、その操作過程や総合図形から四角形、三角形の分類、性質をはじめとする初等幾何の分野の学習を進めるという方法および内容に対して名付けられた名称である。

このような試みは「一般の四角形で平面が敷き詰められる」ということがベースにある。これは、「四角形の内角の和が 360° である」と等値だが、あまり知られていないばかりではなく、すぐには納得されない。合同な四角形をいくつも作り、それを敷き詰めてみて一目瞭然(実証)ということになる。

これからの高学年の図形指導では、教具を使っての試行錯誤による予想もしなかつた解との出会いという『意外性』、問題を扱うことによる予想もしなかつた様々な解との出会いという『意外性』との出会いを重視していく必要があると考えている。

〔引用文献〕

- 1) 財団法人応用教育研究所学力検査研究部「教研式・全国標準診断的学力検査小学T形式(5年算数)」2000
- 2) 新潟県小学校教育研究会「平成12年度 学習指導改善調査事業 報告書」県小学校教育研究会 2001
- 3) 文部省「小学校学習指導要領解説 算数編」東洋館出版 1999 53～54PP
- 4) 上垣渉「小学校 しきつめの幾何—新しい図形指導—」国土社 1986 57～65PP
- 5) 新潟県小学校教育研究会「平成13年度 学習指導改善調査事業 報告書」県小学校教育研究会 2002

〔参考文献〕

- 吉川成夫「小学校 新学習指導要領実践 新しい教育課程と学習活動の実際 算数」東洋館出版 1999
 全国算数授業研究会「算数授業研究シリーズX：これからの図形指導」東洋館出版 2000
 上越数学教育研究会Σ会「今こそ Do Math!」不二印刷 2003