［算数・数学］

中学校数学における説明性の理解の様相に関する研究

－同一集団の２年間（中１・中２）の調査を手がかりにして－

梅川　貢司*

1　はじめに

⑴　問題意識

証明の学習は，中学校学習指導要領によれば「論理的な考察ができる年齢に合わせて論証の指導が行われる」（文部省，1999，p.13）とされている。しかし，筆者は教職経験から証明が中学生にとって理解しにくい内容の一つであると感じてきた。さらに，澤田（2001）の報告にあるように証明は学力低下が著しい内容でもある。澤田（2001）は，小・中学生の学力低下について全国の11都道府県（新潟県を含む）の21校を対象に調査し，この結果を1983年の文部省中学校達成度調査の結果と比較している。それによると83年と同じ問題が18問あり，その中でも証明問題は正答率の落ち込みが最も著しい（1983年が59.8%，今回が41.3%）結果となっている。本当に中学生は証明を学習するのにふさわしい発達段階にあるのであろうか，もしくは，教師の指導が不十分なのではないだろうか。

⑵　証明の学習意義についての先行研究

中学校学習指導要領では，証明の意義として「一般性を保証する」（文部省，1999，p.89）ことが強調されている。この証明の意義を理解している中学３年生の割合はおよそ20～23%であり，「一般性」を中心にした証明の意義指導には限界があることが報告されている（小関ら，1987；国宗，2000；國本，1996）。さらに，学習者の「理解」のために証明が果たしうる役割や機能に着目すると，次の２点が示唆される（de Villiers，1990；Hanna，1995；宮崎，1993；國本，1998）。

・証明の基本的な機能である説明の機能が学習初期の生徒たちに理解されやすいことから「説明性」を証明の意義として強調すべきである。
・学校数学で扱う証明を，数学的アイデアを内在する形式的でない証明まで範囲を広げることが，証明の意義指導の効果を挙げうる。

また，梅川（2002）は中学３年生の調査から，この説明性は*Action Proof*（=「証明のアイデアを含む操作的証明」，Semadeni，1984）を取り入れた適切な文脈において，生徒たちの学力に関係なく理解されうると指摘している。

⑶　本研究の目的

梅川（2002）が指摘するように「説明性」は本当に学力とは関係なく理解されるのであろうか。もしそうであるならば，入学当初からもっと「説明性」を中心に据えた授業をデザインすべきである。そのことにより，生徒たちは証明の学習だけでなく数学の学習全般に渡って探究心に満ちた学習活動を展開し，証明の学習においては証明が説明のための有効な道具として認知されるであろう。また，図形領域における「説明性」の理解と数と式領域における「説明性」の理解とは関係があるのであろうか。説明性の理解の仕方が領域によって異なるのであれば，数学教師の授業設計もその実態にあわせて工夫すべきである。これらのことを明らかにすることが本研究の目的である。

2　研究の方法と概要

⑴　説明すべき状況の設定について

数学授業において，生徒自らが説明しなくてはならない状況を作り出す枠組みが本研究のためには必要である。そのために，次の２点に留意して授業を設計した。これは，後述する調査１と調査２に共通している枠組みである。

①　未知命題を用いること

既知の内容については，説明の必要が生じない可能性がある。例えば，「三角形の内角の和は180°である」ことは

＊ 上越市立安塚中学校

小学校算数で学習してきている内容であり，生徒はそのことを正しいと認めている。それ故に，このことを改めて説明する必要性を生徒たちは感じない。よって，そのような既知命題を用いた場合には，生徒たちの説明性の理解について正しく調査することができないと思われる。従って，本研究においては生徒にとって未知な命題を用いて調査することが必要である。

② 説明責任を教師から生徒に移行すること

決定問題の答えを生徒に予想させることにより，その問題が生徒自らのものとなり学習意欲が高まる（相馬，1995）。そして，予想（または推測（conjecture））の説明責任が教師から生徒に移行し，生徒が説明を考えなければならない状況が生じる（Balacheff，1987）。本研究においては，このように教師が意図的に，生徒に答えを予想させ，生徒が説明を考えなくてはならない状況を作り出すことが必要である。

⑵ 図形領域において「説明性」が学力とは関係なく理解されうることについて（調査１）

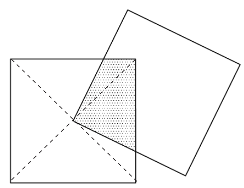
① 調査対象と調査時期

本当に学力とは関係なく説明性が理解されるのであれば，小学校算数の学習を終えたばかりの中学１年生でもこの説明性を理解できるはずである。そこで，新潟県公立Ｙ中学校１年生１クラス（男子９名，女子12名，計21名）を対象に，オリエンテーション後の授業（平成15年４月６日，７日の計２時間）で調査を実施した。

② 調査方法と調査内容

先行研究と比較するために，同様の調査問題を用いることにした。右の図１は調査１で用意した調査問題である。この問題をワークシートとOHPを用いて生徒に提示し，答えを10分で予想させることから始めた。答えの予想は個人で行うよう指示した。予想の際には，ワークシートの正方形と合同な正方形が印刷された透明シートを全員に配布し，実際に操作しながら答えの予想を立てさせた。予想を発表させた後，５㎜方眼用紙に印刷したワークシートを全員に配布して，その予想を確かめる活動を30分間行った。確かめ方は特に指示せずに，任意のグループでの話し合いを許可した。このように答えを予想し，それを確かめる活動を実施した後，この問題では「どんな重なり方をしてもその重なる部分の面積は同じになる」ことをクラス全体で定式化した。

問題　右図のように大きさが同じ正方形を重ねて，一方の正方形を他方の正方形の対角線の交点を中心にして一回転させます。



２つの正方形がどのような重なり方をしたとき，重なる部分の面積が一番大きくなるでしょうか。

〈図１　調査１に用いた問題〉

２時間目は，１時間目に生徒から回収したワークシートを教師が分類し，それぞれの確かめ方（後述）について代表生徒に発表させることから始めた。その後，どの説明が一番よいかを他の説明と比較して選択させ，その選択理由をワークシートに記述するよう求めた。

⑶ 図形領域と数と式領域における，「説明性」の理解の関係について（調査２）

① 調査対象と調査時期について

図形領域における「説明性」の理解と数と式領域における「説明性」の理解との関係を明らかにするために，調査１と同一集団を調査対象にした。同集団は２年生に進級しており，中学２年「式の計算」における式の利用（使用教科書は学校図書）の最初の授業（平成16年６月３日，４日の計２時間）で調査を実施した。

② 調査方法と調査内容

右の図２は１時間目の最初に提示した問題１である。この問題１をワークシートにして配布し，答えを予想させることから始めた。いくつかの具体例から答えが予想された後，どうしてそうなるのかを考えさせた。確かめ方は特に指示せずに，任意のグループでの話し合いを許可した。

連続する３つの整数の和は，＿＿＿＿＿＿＿である。

〈図２　調査２に用いた問題１〉

２時間目は，１時間目の授業の後に教師が集約した３通りの説明（後述）を代表生徒に発表させた。その後，生徒たちに３つの説明を比較してどの説明が一番良いかを選択させ，その選択理由をワークシートに記述するよう求めた。右の図３は，その後取り組むよう指示した問題２である。これは，問題１と類似した問題に対して生徒たちがどの説明方法を用いるのかを調査するために用意した。

なお，調査の様子は，調査１と調査２ともVTRとATRで記録した。

連続する５つの整数の和は，＿＿＿＿＿＿＿である。

〈図３　調査２に用いた問題２〉

３　結果

⑴　調査１（平成15年４月６日，７日）

①　10分間の予想の結果

右の表１は予想の分布を示したものである。10分間の予想で13名（62%）の生徒が正しい予想を立てた。分類01の13名のうち２名の生徒が，そうなる理由をワークシートに記述している。例えば，Ａ子（仮名，以下生徒名はすべて仮名）は右下の図５のように記述している。

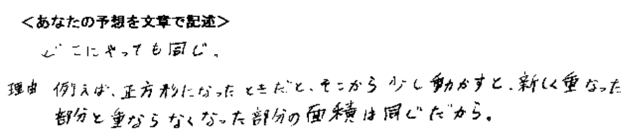
「どこにやっても同じ。理由　例えば，正方形になったときだとそこから少し動かすと，新しく重なった部分と重ならなくなった部分の面積は同じだから。」

表１．予想の分布

分　類		合計	%
01	どこでも同じ	13	61.9
02	分からない	2	9.5
03	未記入	6	28.6
合　計		21	100

また，Ｆ子は次のように記述している。

「全部同じ面積だと思う。三角形のときと正方形のときの面積を計算でやると同じで，四角形は正方形と考えて，あいている部分にはみでているのをいれるとできる。」

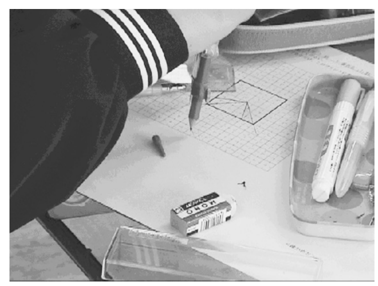


〈図５．Ａ子の予想ワークシートの記述〉

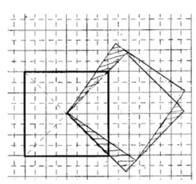
表現こそ違うが２人とも「増える部分と減る部分」に注目し，どのように動かしてもそれらの面積が同じであることを言及している。この「増える部分と減る部分」がいつも同じであることがこの命題の本質である。このように正しく予想し，自らの予想の正当性の根拠（理由）を示しているこの２人は，教研式知能検査の結果が80と73であり，この学級の上位２名である。

②　予想を確かめる活動

右の写真１は，予想を確かめているＧ子の一場面である。写真１で見られるように，生徒たちはワークシートに透明シートと定規・コンパスを用いて作図したり，５㎜方眼用紙を利用して計算したりしながら，それぞれ確かめの活動を行った。あるグループは次のように対話しながら確かめの活動を行っている。



〈写真１．確かめをしているＧ子〉



Ｐ子：ねえねえ，この面積とこの面積，同じになるじゃん。///

Ｑ子：なんかここ，ちがくない？（重なり以外に色をつけているのに対して）

Ｓ男：おれ，色つけないでおこう。

このグループの発話記録に見られるように，自分の考えの正当性を級友に確認したり（Ｐ子），級友の間違いを指摘したり（Ｑ子），級友の考えを参考にしたり（Ｓ男）しながら，この活動が行われた。

右の表２は，生徒たちの確かめ方を分類したものである。なお，分類の意味は以下のとおりである。

表２．確かめ方の分類

分　類		合計	%
01	不等辺	9	42.8
02	計算	3	14.3
03	特殊	3	14.3
04	未記入	6	28.6
合　計		21	100

分類01：不等辺四角形と直角二等辺三角形を用いて，「増える部分と減る部分」が同じであることを理由に挙げている。

分類02：計算によって，重なる部分の面積が等しいことを示している。

分類03：特殊な重なり方の２つ（直角二等辺三角形と正方形）を比較して，面積が同じになることを示している。

分類04：ワークシートに未記入である。

ほとんどの生徒はグループで活動しており，分類04の生徒たちは級友のワークシートで一緒に考えていたために自分のワークシートに記入しなかった可能性がある。

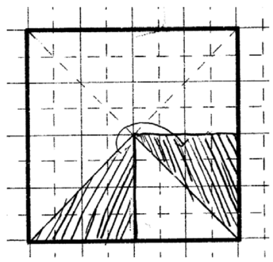
③　確かめ方（説明）の選択

２時間目に，確かめの方法を代表生徒に説明させ，どの説明が一番よいかを生徒たちに選択させた。説明順は教師が意図的に分類03，分類02，分類01の順とした。代表生徒の３人は次の発話記録のように説明した。

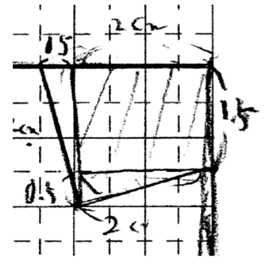
Ｄ子（分類03）：（次頁の図６を指して）三角形（直角二等辺三角形の意味）と四角形（正方形の意味）を比べると，この斜線の三角形がこっちの三角形とぴったり重なるから，面積は両方とも４ヘイホウセンチで，同じです。

U男（分類02）：三角形（直角二等辺三角形の意味）の場合は，４かける２わる２で４，正方形の場合は２かける２で４，この四角形（不等辺四角形の意味）の場合（下の図７を指して）は，ここが0.5かける２わる２で0.5，ここも0.5かける２わる２で0.5，ここが２かける1.5で３，で0.5たす0.5たす３で４となります。それから，ここ（1.5の所をさす）が1.3の場合，ここ（0.5の所をさす）は0.7となって，さっきと同じように，面積が４となります。

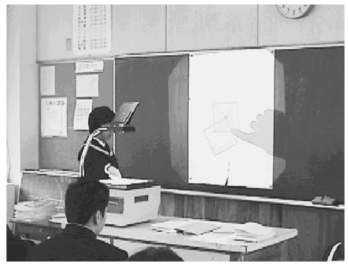
Ｆ子（分類01）：（下の写真２は説明時の様子である）最初，こんなふうに（直角二等辺三角形）重なっていて，次に（少し動かして，不等辺四角形にする）こんなふうに重なったのとくらべると，この増えた所は，さっきのなくなった所と同じだから，面積は変わらないと思います。



〈図６．Ｄ子の説明〉



〈図７．Ｕ男の説明〉



〈写真２．Ｆ子の説明の様子〉

右の表３は，３人の説明の後にどの説明が一番よいかを選択させた結果である。17名（81％）の生徒が分類01の説明を一番よいと支持している。その選択理由は，「増えた所となくなった所がどんな場合でも同じであるというのがいい」のように，この命題の本質を理解し評価する記述が14名（67％）であった。この14名の中には，前頁表２の分類03（特殊）と分類04（未記入）の生徒が含まれている。つまり，自分がうまく表現できなかったことをF子が分かりやすく表現したことにより分類01（不等辺）を一番よいと支持したと推測される。

表３．よいと思う説明の選択結果

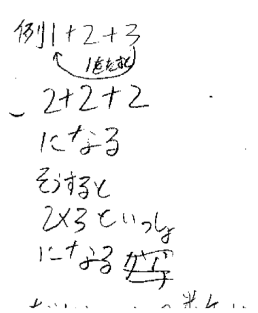
分類		合計	％
01	不等辺（Ｆ子）	17	80.9
02	計算（Ｕ男）	3	14.3
03	特殊（Ｄ子）	1	4.8
合計		21	100

分類02の主な選択理由は「計算の方が細かくていい」，分類03の選択理由は「自分がやった方法だから」であった。これら４名（19％）の生徒たちは，説明性の理解についてはまだ不十分である。

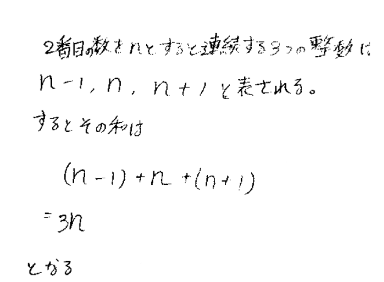
⑵　調査２（平成16年６月３日，４日）

①　問題１（連続する３つの整数の和）の説明を考え，選択する場面

問題を提示した際のM男の発話「トリビアの種だ！」により学級全員が答えを予想することに興味をもった。教師は具体的にどんな場合なのかを生徒に答えさせた。「１＋２＋３＝６，４＋５＋６＝15，21＋32＋43　×」ここで，連続する３つの整数の和というものがどういう場合なのかが確認された。さらに続けて「２＋３＋４＝９，７＋８＋９＝24，20＋21＋22＝63」と発表されたところで，教師は生徒たちに答えを予想することを求めた。Ｆ子が「３かける中央の数」，Ｑ子が「３で割ると割り切れる数」，Ｕ男が「３の倍数」と発表した。Ｆ子とＵ男の２人の予想が学級で認められ，教師はどうしてそうなるのかを考えるように求めた。説明を考えはじめてすぐに，Ｓ男が上の図８のように書いたワークシートを教師に見せ，他の場合であっても必ずこのようにして説明できることを教師に説明した。また，その５分後にＡ子が上の図９のように文字式を用いた説明を教師に見せながら説明した。



〈図８．Ｓ男の筆記録〉



〈図９．Ａ子の筆記録〉

右の表４は，１時間目の授業後に回収したワークシートから，生徒たちがどのように説明したのかを分類したものである。なお，分類の意味は次の通りである。

分類1-1：（A子のような）文字式を用いた説明

分類1-2：（S男のような）数字式での説明

分類1-3：（１＋２＋３＝６＝２×３のような）具体例からの推測

右の表５は，２時間目の授業で３つの説明方法からどの説明が一番良いと思うかを選択させた結果と調査１の表３との相関である。分類1-4（その他）は，「どれでもよい」と回答したものである。表４と比較すると調査１の分類03と分類02の生徒は，自らの説明方法（数字式）が一番良いと選択していることが分かる。一方，調査１の分類01（不等辺）の生徒たちは，必ずしもそうではなかった。数字式で説明しながらも文字式による説明が一番良いと選択した生徒が５名，具体例を挙げるのみであったが数字式での説明が一番良いと選択した生徒が３名であった。

表４．問題１の説明方法の分類

分類＼調査１		03 特殊	02 計算	01 不等辺	合計
1-1	文字式で			1	1
1-2	数字式で	1	3	12	16
1-3	具体例で			4	4
合　計		1	3	17	21

表５．問題１のよい説明方法の選択結果

分類＼調査１		03 特殊	02 計算	01 不等辺	合計
1-1	文字式で			6	6
1-2	数字式で	1	3	10	14
1-3	具体例で				0
1-4	その他			1	1
合　計		1	3	17	21

それぞれの選択理由は主に次のものであった。

分類1-1（文字式）：**「いろんな場合を確認しなくてもよい」**（４名／６名）

分類1-2（数字式）：**「文字を用いるよりも簡単でわかりやすい」**（13名／14名）

分類1-3（具体例）の説明に対して，**「説明になっていない」**と記述した生徒は７名であった。

②　問題２（連続する５つの整数の和）の説明を考える場面

右の表６は問題２の説明方法の分布である。表５の分類1-1の生徒たち６名のうち，問題２を文字式で説明した生徒は２名，数字式で説明した生徒は４名であった。この４名は文字式を用いた説明のよさを理解しながらも，数字式を用いた説明の方が取り組みやすいのかもしれない。表５の分類1-2の生徒たち14名のうち，問題２を文字式で説明した生徒は１名，数字式で説明した生徒は13名であった。表５の分類1-4の生徒は数字式で説明した。

表６．問題２の説明方法

分類＼問題２		2-3 具体例	2-2 数字式	2-1 文字式	合計
1-1	文字式で		4	2	6
1-2	数字式で		13	1	14
1-3	具体例で				0
1-4	その他		1		1
合　計		0	18	3	21

４　考察

⑴　中学校入学当初から説明性を理解していることの確信

小学校算数の学習しかしていない中学１年生が，未知命題の答えを予想しそれを確かめる活動を通して命題の本質に気付き（表２の分類01；９人，43％），あるいは，そのことに気付かなかったとしてもその本質を根拠にした説明を支持した（表３の分類01；17人，81％）事実は注目に値する。つまり，説明とはそうなる根拠が明示されなければならないことを中学校に入学したばかりの中学１年生が理解しているということである。このことから，中学校の数学授業では「なぜそうなるのか」を中心に据えた授業をデザインすることが重要であると考える。生徒たちがもっている知的好奇心や探究心を掻き立たせる授業をデザインすることで，生徒たちの学習意欲を向上させる魅力ある数学授業ができると確信する。

中学２年生で学習する「図形の証明」はその形式が難しいと感じる生徒が多いかもしれない。しかし，証明が「なぜそうなるのか」を表現する上で有効な道具であることを生徒たちが認識すれば，意欲的にその道具を使えるようになりたいと思うはずである。

⑵　数学的活動を積極的に取り入れることは学習効果を高める

今回の授業では，透明シートを教師が用意し生徒に操作させながら結論を予想させた。このことが，正しく予想できたり，命題の本質に気付かせたりしたといえる。また，５㎜方眼用紙でワークシートを用意したことが実測や計算といった学習活動を促進させた。そして，任意のグループによる協同学習では数学的対話が生まれ，学習の練り上げ

効果をもたらした。このように，教師が積極的・意図的に数学的活動を授業に取り入れることが，生徒の自発的な学習を実現させ，学習効果を高めるということを実感した。数学は紙と鉛筆だけあれば勉強できるという学習観は上位の一部の生徒にしか通用しない。生徒の学習具を教師が工夫して用意したり，生徒間の相互作用を生かすように授業を展開したりすることが数学授業では大切である。

⑶ 数と式領域における「説明性」の理解は図形領域と同様である

表５から数と式領域においても，図形領域と同様に命題の本質を根拠にした説明が支持されることが分かった。ただ，選択理由にあるように文字式についての理解が十分でなくては「文字式を用いた説明」が支持されないし，表６から「文字式を用いた説明」を用いようとしないということも明らかになった。これらの生徒にとっては，文字式を用いなくとも数字式でそうなる理由を十分に説明できるし，分かりやすいということである。しかし，数字式では説明することが困難な命題も多い。大塚（2004）が指摘するように，文字式を用いるよさとして「一般性」だけでなく「形式性」や「構造性」を積極的に認める特別な指導が必要である。

５　まとめと今後の課題

今回の調査結果から，「説明」がどういうものでなければならないかを，中学校入学時に多くの生徒が理解していることを確信できた。また，「図形」領域での理解と「数と式」領域での理解の仕方は同様であることも明らかになった。この調査結果を今後の数学授業に生かして，「なぜそうなるのか」を大切にした授業設計をしていきたい。そして，証明が説明のための有効な道具であることを生徒たちに認識させ，生徒たちが証明を意欲的に学習しようとする授業を計画し実現することが今後の課題である。

６　引用・参考文献

Balacheff, N.（1987）. Towards a problématique for research on mathematics teaching. Major address of the Research Precession of the 65th Annual meeting of the national council of teachers of mathematics.

de Villiers, M. （1990）. THE ROLE AND FUNCTION OF PROOF IN MATHEMATICS, Pythagoras，24，17-24.

Hanna, G. （1995）. The role of proof in mathematics education. Lecture Note at the Tagung für Didaktik der Mathematik in Kassel, Germany.（磯野正人訳.（1996）．数学教育研究，11，155-168．上越教育大学数学教室.）

國本景亀（研究代表者）.（1996）．空間直観力と論理的思考力を育成するための教材開発と指導法の改善．平成６～７年度文部省科学研究費補助金　一般研究（C）．課題番号 06680256研究報告書.

國本景亀．（1998）．準経験主義の哲学に基づく証明指導の研究．日本教科教育学会誌，21（2），35-43.

国宗　進．（2000）．図形の論証に関する理解度の変化．日本数学教育学会誌，82（3），66-76.

小関熙純編著．（1987）．図形の論証指導．明治図書.

宮崎樹夫．（1993）．学校数学における証明の意義に関する考察：証明の機能に焦点を当てて．筑波大学教育学系論集，18（1），155-169.

文部省．（1999）．中学校学習指導要領（平成10年12月）解説：数学編．大阪書籍．（引用）

大塚高央．（2004）．文字式の「よさ」の指導に関する基礎的研究：中学２・３年生を対象にした調査を手がかりにして．上越数学教育研究（19），37-48.

澤田利夫（研究代表者）.（2001）．学力は低下しているかー学力調査ー中間報告．「学力低下の実態とその対策に関する実証的研究」．平成12年度科学研究費補助金　基盤研究（C）（1）．課題番号12680190研究成果中間報告書.

Semadeni, Z.（1984）. Action Proofs in Primary Mathematics Teaching and in Teacher Training. *For the Learning of Mathematics*，4，32-34.

相馬一彦．（1995）．「予想」を取り入れた数学授業の改善．明治図書.

梅川貢司．（2002）．数学教育における証明の意義指導に関する基礎的研究：*Action Proof*を選択肢に取り入れた証明の意義理解調査から．上越数学教育研究（17），67-78.