教育実践研究　第24集（2014）　97－102

［算数・数学］

加法場面における小学２年生Ａ児の知識の形成過程について

－子どもが用いるmodelの変化と役割に着目して－

富田　一志*

１　はじめに

小学校２年生は，加法の問題で「二位数＋二位数」に初めて出会う。彼らが最も困難に感じることは，数を位ごとに処理し，それらを合併することではないだろうか。小学校１年生では，例えば「９＋８」で，「どのように10のまとまりをつくるのか」に学習が焦点付けられる。一方，小学校２年生では，「29＋38」のように，一位数同士の計算に加え，複数の10のまとまりを扱いながら，全体量を求める必要がある。ここに大きなギャップがある。

一方，教科書の指導計画は，そのギャップに十分に応えるものではないだろう。そこでは，「二位数＋二位数」の場面を具体として掴むことよりも，立式と筆算の手続き指導により重点が置かれているからである。筆者がここで問いたいことは，喜んで筆算を練習し，「できた」と喜ぶ子どもたちが，本当に加法場面の問題を理解しているのだろうか，ということである。また，筆算の「やり方」に習熟することをもって，加法の知識を得たと考えていいのだろうか，ということである。筆者は，子どもたちが，その子の個性を生かし，自ら知識を形成し，算数学習に取り組む姿を願っている。そのために，子どもの見えにくい変容を見取り，指導に生かしていく態度を大切にしたい。

富田（2009）は，小学校５年生が割合単元において自らの知識を土台とし，式をつくっていく過程を検討することを試みた。富田（2009）は，子どもが用いる素朴なmodelが変化を繰り返しつつ，数学的なmodelへと形式化されること，modelには，その子のこだわりがあり，知識形成のために大きな役割を担っていることを指摘した。筆者は，このような学習者の有り様について，より検討を重ね，知見を得たい。それが，学習者の個性を知ることになるからである。

本研究の目的は，子どもが現実場面をもつ加法の問題を解決していくことにおいて，自らの数学的知識を土台とし，新たに知識を形成し，形式化していく過程を明らかにすることである。

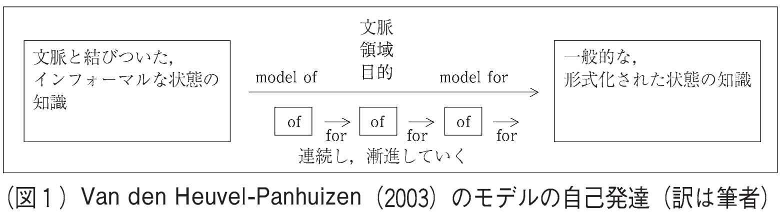
２　子どもの活動を中心とした視点

（1）RME理論におけるmodel

日常性の文脈からカリキュラムや教材をつくる一派としてFreudenthal派が提唱する現実的数学教育（Realistic Mathematic Education略称RME）がある（高橋，2003）。子どもが現実世界における算数・数学的活動を通し算数や数学を経験し，知識を形成することをFreudenthal派は目指している。

Gravemeijer（1997）は，インフォーマルな知識が抽象的な数学的知識へと向かうための起点であるべきだとする，modelの自己発達というRMEの鍵となる原理を示した。Gravemeijer（1997）によれば，子どもにとって身近な状況に基付くmodel（model of the situation以下model-ofと呼ぶ）は，子ども自ら活動することで心的に形成される。このmodelが数学的見地からの方略に焦点づけられることによって，数学的推論に向かうmodel（model for mathematical reasoning以下model-forと呼ぶ）へと発達する。

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は，model-ofからmodel-forへの移行を単一的な転換ではなく局所的かつ連続的なものと見なした（図１）。教授-学習過程の中で何がmodel-of，或いは何がmodel-forであるかについては，その都度子どもが対峙する文脈，領域，機能に依存する。この視点は，model-ofが最初の現実場面のみに基付くとする



（図１）Van den Heuvel-Panhuizen（2003）のモデルの自己発達（訳は筆者）

＊ 上越市立高志小学校

Gravemeijer（1997）の論点とは異なるものである。

本研究では，児童の活動を分析する視点として，Van den Heuvel-Panhuizen（2003）が示す枠組みを採択する。この枠組みを採択したのは，知識の形成過程を局所的に捉えることで，model-ofからmodel-forへの移行に新たな視点が得られると考えたからである。

⑵　単元におけるmodelの自己発達について

筆者自身の教職経験から，加法場面におけるmodelの自己発達の過程を仮定する。

加法場面の初期段階において，理解の水準は，より文脈に即したインフォーマルなものであり，modelは，文章題などの現実場面そのものである。

加法における素朴なmodel-ofは，全部を数える活動に支えられ形成される。解決は，１つ数えや２つ数え，５つ数えといった子どもにとって馴染み深い方略に関係付けられる。

合併される数自体が大きくなる場面で，全体を１や２などの小さな単位で数え直すmodel-ofは，「10のまとまりを作りながら全体を求めること」へと意味付けされ直し，一の位と十の位の関係を推測するためのmodel-ofへと発達していく。幾らかのブロックを，10のまとまりを作りながら操作し，全体を求める活動が想定される。

繰り上がりのある場面では，場面に応じて，全体を小単位で数え直すmodel-ofと10のまとまりを作りながら全体を求めるmodel-ofが互いに相補的に用いられるようになる。加数分解，被加数分解と言われる方略によって，10のまとまりが作られるようになり，「さくらんぼ計算」などの形で，操作が式化されていく。

これらのmodel-ofは，学習者の中で繰り返し用いられ，文脈に依存しながらmodel-of，forへと連続的に転換していく。そして，最終的に，繰り上がりのある加法では，加数分解や被加数分解による式の変形から，筆算へと至る。このように，被加数と加数について，十の位の数と一の位の数を柔軟に捉え，操作し，数を形成する活動が，数える基準量を１ずつなどの小単位で見たり10ずつと見たりする，加法場面におけるmodel-forへと繋がっていくと考える。

3　教授実験について

⑴　教授実験の構想

教授実験では，絵図を用いて加法の文脈を描写する活動を設定した。児童が自由に方略を選択することができるとともに，用いられる絵図が，Van den Heuvel-Panhuizen（2003）が示すように，加法の場面を多様に説明する適切な道具になると考えたからである。

教授実験で扱う問題は，大きく３つの場面に分けて構成した。第１～４時は，繰り上がりのない加法の文脈を絵図や式，文を用いて解決する場面である。第５～９時は，繰り上がりのある加法の文脈を絵図や式，文を用いて解決する場面である。また，筆算アルゴリズムの形式化も扱った。第10～12時は，100を単位とした加法，応用問題，練習問題などである。

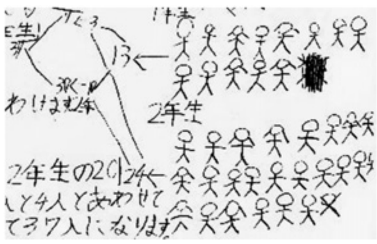
⑵　教授実験の方法

教授実験は，新潟県公立Ｔ小学校２年生12名を対象に，2012年６月下旬から７月にかけて，計12時間実施した。本稿で報告するのは，Ａ児の活動である。毎時間の授業は，ビデオカメラ１台によって記録した。授業は，各45分間程度のものを校時表に基づいて行った。対象児童の抽出は，授業者である筆者が選定した。算数学習に積極的に取り組み，会話などから思考過程が見えやすい児童を抽出した。筆者は，当時２年生12名の学級担任であった。

4　子どもの活動の解釈と考察

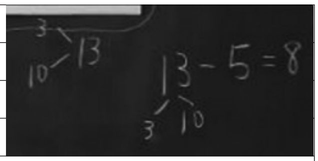
⑴　A児の活動の実際と解釈

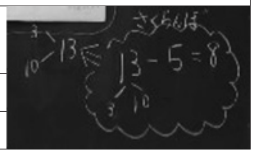
１時間目**「１年生13人と２年生24人がいっしょにえんそくにいきます。バスは40人のりです。ぜんいん１だいのバスにのれるでしょうか。」**で，Ａ児は，１年生と２年生を一人一人，簡単な絵図で表現した。この絵図で示された状況は，問題を解決するためというよりも，合併という文脈をそのまま記述したmodel-ofである。次に，Ａ児は，数を被加数と加数を十の位と一の位にそれぞれ分解し，位ごとに加えたものを，最後に合わせる方略で解決を行っている（図２）。この方略について，全体で以下のようなやりとりがあった。



（図２）Ａ児の絵図

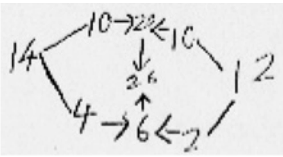
650	T	何か，このさあ，A児さんのとこの見てみると，・・・懐かしいのがあって，
668	B児	ああー。・・・さくらんぼ，こうやって下に，
671	T	そう，例えば，こういう問題があったときに，　※「13－５」を例示する。
672	A児	さくらんぼ計算。
673	T	こうやってさ，さくらんぼにして，10－５は５。５＋３は８だから，答えは，８だねって，やったでしょ。
681	I児	ああー，何か・・・。
683	T	数字をさあ，束とバラに分けるってアイデア使ってるんだよね。　※A児のプリントを指す。
691	T	えい，えい，えい。こういうことだね。 ※A児のアイデアと，「13－５」の関連を板書で示す。
694	I児	さくらんぼ計算。
695	T	そう，さくらんぼ計算って，いったんだよね。





A児は，１年生の時から親しんできたやり方を発展させ，２位数＋２位数の場面で，一の位と十の位の関係を推測するためのmodel-ofを形成している。なお，このA児の方法は，学級の中で「さくらんぼ計算」と名付けられた。

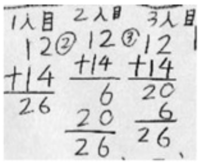
（図３）A児の絵図



（図４）A児の計算

２時間目「**赤いおはじきが12，青いおはじきが14こあります。ぜんぶでいくつですか。**」で，A児は文脈をそのまま記述するmodelを形成した（図３）。絵図に級友B児を記したA児は，算数を楽しんでいる。次に，A児は，さくらんぼ計算を行う（図４）。この計算で，A児は，まず，被加数12，加数14を書き，それぞれの数を十と一に分ける記述を行った。次に，位同士の数を合わせ，「さくらんぼ」の中心で「20＋６」を行うことで解決に至っている。この「さくらんぼ計算」は，「二人でおはじきを持ち寄ったこと」という文脈と関連付けられ描かれた絵図である。その後，A児は，図３に戻り，再度文脈に依存した絵を描いている。A児は，絵図と計算を柔軟に用いている。

３時間目「**どんな便利計算をしましたか。せつめいしましょう。**」で，教師は３つの計算方法を示した（図６）。図６の左は，前単元で子どもたちが「便利計算」と命名し，用いてきたものである。便利計算は，ブロックや位取り板を操作しながら作った方法であり，子どもたちに馴染み深いものであった。②番と③番の計算を見た際，A児は，「分かるー。俺。」，「そういうことねって。」と呟いた。②番の方法について，A児は次のような記述をした（原文ママ）。



（図５）教師の例示

> まず，一人目はふつうのべんりけいさんです。つぎの二人目は，ちょっとちがく，２かいべんりけいさんをつなげています。やりかたは，まずふつうのべんりけいさんをします。つぎにこたえをいっきに，26とやらないで，さいしょは６，つぎに20とやりました。さいごに２かい目のべんりけいさんでやったこたえの６と20をあわせ・・・

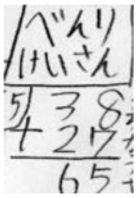
A児は，②番の方法を，図４で用いた「さくらんぼ計算」の方法「10＋10＝20，２＋４＝６，20＋６＝26」と見なし，説明している。これは記述の下線部から伺え，A児の「さくらんぼ計算」へのこだわりを示している。

1085	A児	べんりけいさん
1087	T	そう。いろんなやり方をして，全部で何冊かということを求めます。
1095	A児	ホントだ。繰り上がりがある。
1098	A児	（大げさに，驚いたというジェスチャーをする。）
1099	T	・・・さくらんぼをしたりとか，位取り板を使ったりとか，いろんなやり方で解決ができたよね。
1111	A児	それ，一の位でも十になっちゃう。
1125	A児	繰り上がりある。・・・絵で説明しよう。

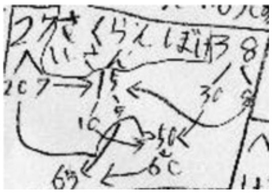
５時間目「**きょうしつにえ本が38さつあります。それとずかんが27さつあります。ぜんぶで何さつありますか。**」で，A児は，左表のように発話した。A児は，この問題に，「繰り上がり」があることに気付いている。しかし，位ごとに加えるmodel-ofを形成しても，便利計算で繰り上がりを説明することができず，絵による解決を選ぶ（図６）。この絵図は，数学的な解決に直接結びつかない，文脈そのままのmodelへの逆行である。

（図６）A児の絵図

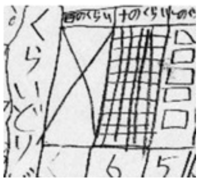
次にA児は，図６で示した絵図を一冊一冊指で数える。その後，「べんりけいさん」と書き，図７のような記述を



（図７）Ａ児の計算



（図８） Ａ児の計算



（図９） Ａ児の絵図

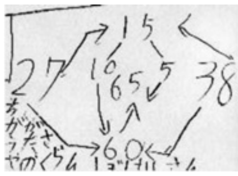
行った。この便利計算は，「38＋27」で，「1111｜Ａ児｜それ，一の位でも十になっちゃう」を説明するためのmodelとはなっていない。次に，Ａ児は，「さくらんぼ計算」をする（図８）。ここでもＡ児は，２位数＋２位数のたし算で，位同士の関係を推測するためのmodel-ofを形成した。また，一の位の計算を「８＋７＝15，15＝10＋５」と10の束を使って分け直すことで，今までの「さくらんぼ計算」を「繰り上がり」を説明することを可能にする「さくらんぼ計算」へと変化させた。

次に，Ａ児は，答え65を表す位取り板を絵図で示す（図９）。この位取り板の絵図は，計算のための方略を示すものではない。文脈そのままのmodelへの逆行である。

その後，Ａ児は，さくらんぼ計算の方略について，文章で説明している（原文ママ）。

・・・えほんを30さつと８さつにわけます。ずかんを20さつと７さつにわけます。えほんとずかんの20さつと30さつをあわせて50さつです。同じにやって８さつと７さつをあわせて15です。15を10と５にわけます。10と50をあわせて60です。のこった５と60をあわせて65です。

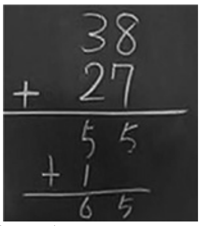
Ａ児にとって，さくらんぼ計算をすることは，位同士の関係を推測するためのmodel-ofを形成することである。その後，Ａ児は，図８の「さくらんぼ計算」を漸進させ，別の方法でさくらんぼ計算を生成した（図10）。ここでは，被加数と加数のそれぞれを位ごとに分解する記述が省略されている。また，Ａ児は，このさくらんぼ計算では，一度「20＋30＝50」と書き，50の部分を60と訂正している。



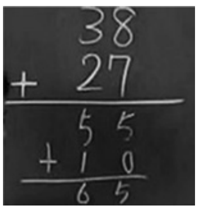
（図10） Ａ児の計算

６時間目は，５時間目に行った個人の解決を持ち寄り，学級で話し合う学習を行った。Ｂ児が，図11の考えを以下のように説明した。Ｂ児は，十の位の３＋２＝５，一の位の８＋７＝15で，次に15を10と５に分解する。Ｂ児は，その10を１と捉え直し，（３＋２）＋１＝６とすることで，解決を行った。Ｂ児は，基準量を柔軟に見るmodel-forの状態にある。一方，Ａ児は，発話（2079）に続いて，「2087｜えーっと，ゼロを書いても，いいんじゃないかな。」といい，Ｂ児の計算に，０を書き加えた（図12）。これは，Ａ児が形成した図10の「さくらんぼ計算」への逆行を示すものであり，Ａ児がさくらんぼ計算へこだわって活動していることを示している（以下Ａ児のこだわりmodelという。）

1946	Ｂ児	えっと，まず，３＋２で５です。
1973	Ｂ児	８＋７は，15だけど，・・・こっちは一の位だから，15を・・・10と５に分けて， ・・・ここに10を書くと／／／こう書いて，こっちに５を書きます。
2039	Ｂ児	えと，これをまた足すから，ここに，＋を書いて，
2047	Ｔ	あ，いいよ，そのまま書いちゃって。
2052	Ｂ児	書いて，で，５＋１は，６で，ここに数字は何もないから，このまま５と書きます。
2070	Ｂ児	で，60・・・で，65になりました。どうですか？
2078	Ｔ	ありがとう。
2079	Ａ児	Ｂ児さんにちょっと，付け足し。



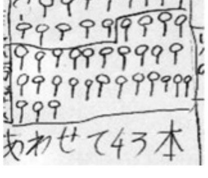
（図11） Ｂ児の計算



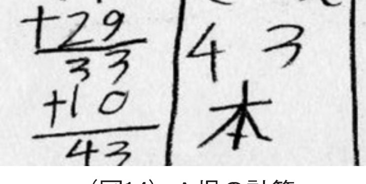
（図12） Ａ児の計算

その後，学級で，図11の便利計算を，「Ｂ児さんの便利計算」と名付けた。

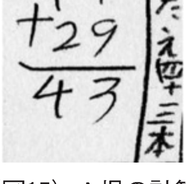
次に，Ｂ児さんの便利計算が，繰り上がりのあるたし算で，本当に便利なのか，他の数を使って確認する活動を行った。Ａ児は最初，「2329｜／／／あんまり，よく分からないなあ。」と呟くが，Ｂ児らと会話する中で手がかりを掴み，Ｂ児の便利計算で解決することができた。ただ，この時のＡ児の便利計算の記述は，以前図12のものであった。



（図13） Ａ児の絵図



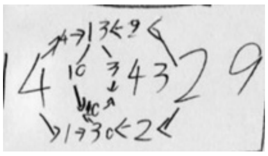
（図14） Ａ児の計算



（図15） Ａ児の計算

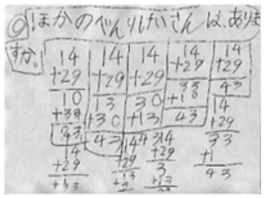
７時間目「しろつめくさの花をB児さんは14本，D子さんは29本つみました。ぜんぶで何本つみましたか。」で，Ａ児は，最初に白詰草の絵を書き始めた。これも，Ａ児にとって，文脈そのままのmodelである（図13）。

次にＡ児は，「Ｂ児さんのべんりけいさん」（図14），「ふつうのべんりけいさん」（図15）と書き，解決を行った。Ｂ児の便利計算は，Ａ児にとって，繰り上がりのあるたし算を説明するためのmodel-ofとして用いられている。また，Ａ児の普通のべんり計算は，繰り上がりのあるたし算を説明するための道具として用いられず，むしろ式と同等の役割しかもち得ていない。次に，Ａ児は，こだわりmodelである「さくらんぼ計算」への逆行を行う（図16）。繰り上がりのあるたし算の難しさに対して，Ａ児のさくらんぼ計算は，解決のための強力なmodelとして用いられている。

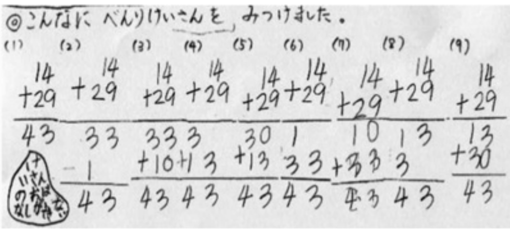


（図16）Ａ児の計算

全体で話し合う場面で，Ｔは，図15の便利計算は，「算数のお話ができない。」と，普通の便利計算の問題点を指摘した。Ａ児は，「1834｜繰り上がりがあっても，そっち／／／」と言い，Ｂ児が「1835｜普通の便利計算だと，１＋２で３なのに，４が書いてあっておかしいと思う。」と話す。その後，Ｔは「他の便利計算はないか」とＡ児たちに投げかける。その後，Ａ児は，隣の席のＣ子と関わりながら，数種類の便利計算を書き出した（図17）。



（図17）Ａ児の計算



（図18）教師の例示

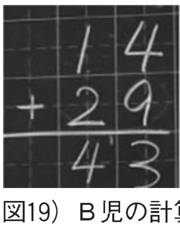
８時間目，ＴはＡ児の図17の解決を意図的に整理し，子どもたちに提示した（図18）。９つの便利計算の手続きを，全体で確認したあと，Ａ児は，以下の記述をした。

> 14＋29の１と２をさいしょにけいさんするやつと４と９をはじめにするやつがあります。

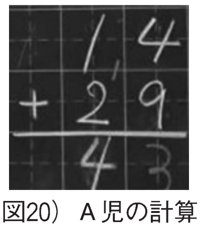
一の位から計算する場合，図18の便利計算（6）から（9）で，どれを選ぶかＴが問うと，Ａ児は「1907｜７番は，・・・０も書いてあって，｜1914｜んー，分かりやすい。」と話す。Ａ児の考えを受け，Ｂ児が，「1940｜んっと・・・最初に，４＋９をして，で，13が並んでいるから（9）が分かりやすい。」と話す。Ｔが，(9) の便利計算を（1）に縮めるために繰り上がりの10をどうするか問うと，Ａ児とＢ児を中心に以下のやりとりがあった。

2454	Ｔ	どこに10書く。・・・ここに書くか？	2493	Ｂ児	それぐらいでいい。	2604	Ｔ	どこに書くっけ。１と
2469	Ａ児	２の下に１を	2499	Ｔ	あ，お話でーきた。	2605	Ａ児	２の間。
2471	Ｔ	２の下に書くか？	2501	Ｂ児	できた！	2606	Ｔ	ここ？・・・ここ？
2472	Ａ児	※頷く。	2504	Ｂ児	そういうことか。	2608	Ａ児	はい。
2481	Ｂ児	だから，ちっちゃく書けばいい。	2505	Ａ児	わー。	2610	Ｔ	４＋９は13
2482	Ｔ	ちっちゃく書くか？	2587	Ａ児	先生，僕，意味違う。	2614	Ｔ	で，１＋
2483	Ｂ児	ちっちゃくチョンって。	2590	Ａ児	１と４の間に，	2616	Ａ児	１＋
2485	Ａ児	え？	2592	Ａ児	ちっちゃく	2618	Ｔ	２で，たす２で
2486	Ｔ	フフ。え，小さすぎる？	2594	Ｔ	やってみよう。	2620	Ｃ	4
2487	Ｂ児	でも，それぐらいでいい。	2602	Ｔ	４＋９は	2621	Ａ児	イエーイ。
2492	Ａ児	※ニコリとする。	2603	Ｃ	13	2622	Ｔ	できたじゃん。

発話2454から2505では，柔軟なmodel-forをもつＢ児が，「４＋９でできた繰り上がりの１をちっちゃく書けばいい（図19）。」と示すことで，Ａ児が「一の位に出来た十の束を，十の位に移す」アイデアを得ている。発話2587以降は，Ｂ児のアイデアを活かそうとするＡ児が，「一の位４＋９でできた十の束を，十の位に移す」というmodel-forに接近し，計算を行っている（図20）。この後，学級で図19，20のような便利計算を，「ちっちゃいらく便利計算」と名付けた。

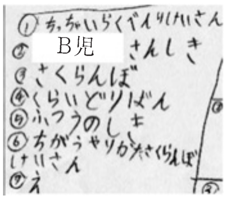


（図19）Ｂ児の計算



（図20）Ａ児の計算

10時間目「**おたのしみ会のじゅんびで，Ｃ子さんはわかざりを74こ，Ａ児さんは65こつくりました。ぜんぶで何こつくったでしょう。**」で，Ａ児は最初に「式74＋65＝139」と記述する。その後，Ａ児にとってのこだわりmodelであるさくらんぼ計算を行い，その後「便利計算」をする。Ａ児は，「70＋60＝130」の繰り上がりを柔軟に扱っている。



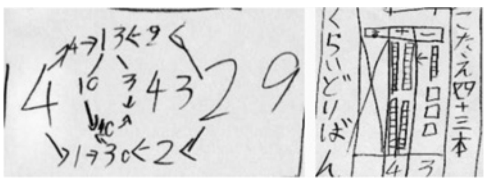
（図21） A児の記述

11時間目「48＋87の便利計算をかんがえましょう。」で，A児は，解決の前に，解決に用いるmodelの優先順位を記述した（図21）。A児は，まず，「ちっちゃいらく便利計算」を選択した。A児は，和が３口になるたし算でも，数える基準量を１，10，100ずつと見る加法場面におけるmodel-forの視点を得ている。また，課題解決に対する絵図の役割が最後になっている。これは，A児が，多様な解決を用いることで，加法の文脈に慣れ，知識のネットワークが形成されていったことの現れである。

⑵ A児の活動の考察

A児は，こだわりmodel-ofであるさくらんぼ計算に何度も立ち返り，解決することを好んでいた。二位数＋二位数のたし算で，A児はさくらんぼ計算を用いることで，位同士の関係を推測し，和の全体を求めていた。このこだわりは強く，A児の全単元の活動を支えていた。A児のこだわりmodelを数学的に漸進させたのは，B児の「B児さん式便利計算」であった。繰り上がりのあるたし算の文脈で，B児が示したmodel-forへの接近と，A児のこだわりmodelとの間で逆行と跳躍が繰り返され，A児は，model-forの視点を得ている。A児のこだわりmodelは，A児が知識を形成する上で，大きな役割を果たしたことを示唆している。これは，富田（2009）の知見と一致している。

A児が特に困難に陥ったのは，筆算（ちっちゃいらく便利計算）をつくる場面で「一の位の計算で出来た十の束を十の位に移す」ところであった。A児の困難は，10を１とみなす（10で十の束ひとつ）と基準量を捉え直す活動に集約されている。A児はさくらんぼ計算や位取り板で，「10を移す」活動を行っている（図22）。一方，図23のように，10の束を１と見なし，記述することに抵抗を示している。本研究で，A児は，B児との交流や，教師の「10を別のところに書くとよい。」といった働きかけで，model-forへと視点を漸進させているが，こういったA児の姿は，こだわりmodelにこだわるが故の，model-forへと変化する際の難しさを示している。しかし，この難しさを経験しつつも，A児が，級友や教師と豊かに関わりながらmodelを漸進させたこと，A児が，加法場面の問題を考え続け，「ちっちゃいらく便利計算」という「自前の筆算」として自ら筆算を形成したことは，有意義な算数的活動であると考えたい。



（図22）10を移す活動

（図23）繰り上がりの記述

5 終わりに

考察から得た示唆を述べる。こだわりmodelは，誤答やこだわりを含む場合も多く，教授カリキュラム上取り上げられにくい。しかし，一方で，こだわりmodelは，学習者自身の個性に即したmodelであるともいえる。教師は，こだわりmodelを回避せず，こだわりmodelを生かし，より数学的な方略に向けたmodelへと発達を促すべきである。また，子どもたちがmodelを自己発達させていく際，自身が描く図の役割や使い方も発達させたことを踏まえ，教師は子どもたちが絵図を描く活動を十分保証すべきである。

次に，課題を述べる。A児は，級友のよさそうなアイデアや教室で取り上げられたアイデアを，こだわりmodelと対応させつつ自身の解決に生かそうとした。本研究は，１人の子どもがたし算のひっ算で，知識を如何に形成するのかという過程に焦点づけられた研究である。一方で子どもが知識形成を行う上で，その子が如何に授業に参加していくのかという視点も欠かすことができないであろう。今後は子どもの知識の形成過程と授業とのかかわりについても考察を進めていく必要がある。

引用・参考文献

Gravemeijer, K.(1997). Mediating between concrete and abstract. In T. Nunes & P. Bryant (eds.), *Leaning and Teaching Mathematics : AnInternational Perspective* (pp.315-345). UK: Psychology press.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 9-35.

高橋等．(2003)．子どもの算数・数学的活動を大事にする，湧き出させる．*上越数学教育研究*，*18*，31-48.

富田一志．(2009)．割合単元における子どもの知識の形成過程について－固執modelの発達と役割－．上越教育大学大学院修士論文.