［算数・数学］

高学年における「除法立式」の指導改善に関する研究

－Vinnerの「『概念定義』と『概念イメージ』の理論」を手がかりとして－

桒山　仁志*

1　はじめに

小学５年生の「小数のかけ算」の導入の時である。導入課題として「リボンの値段は１ｍ当たり80円です。このリボンを2.4ｍ買うと，何円になるか求めましょう」を提示した。そして何気なく子どもたちに「この問題を解くためには，何算を使うでしょう」と聞いたところ，28人中22人までが「わり算」と答えた。

大部分の子どもたちが誤った解答をした原因は，前単元である「単位量当たりの大きさ」の学習が関係していると考えられる。「単位量当たりの大きさ」では，１ｍ当たりの値段を求めるのにわり算を用いる。つまり，「リボンの値段は１ｍ当たり80円です」という文中から「１ｍ当たり」というキーワードを拾い出して，子どもたちは「わり算」と答えたことが推測される。

この誤答例から，子どもは極めてあやふやな根拠で「わり算」を選択しているのではないかと思った。子どもが単なるキーワードで演算を決定しているのであれば，「小数の乗法および除法や分数の加法及び減法の意味についての理解を深め，（１部抜粋）」（p26）*1という学習指導要領の第５学年の目標を達成することができない。また，除法は小学校の３年生から指導が始まり６年生の「分数÷分数」で完結するが，５年生の指導が不十分であれば，６年生の「分数÷分数」の指導にも支障を来すであろう。

本紙では，子どもの除法に対する理解を，Vinnerの「概念定義と概念イメージの理論」を基にして明らかにしていく。そして，このことから高学年におけるよりよい「除法立式」の指導について，ある程度の指導モデルを提案することを目的とする。

2　小学校における除法指導

⑴　各学年の指導の内容

各学年における除法の指導内容を小学校学習指導要領解説（算数編）より抜粋（p14）したものが，右の資料１である。

資料１　各学年における指導の内容

第３学年	○整数の除法…１位数による簡単な除法
第４学年	○整数の除法…２位数などによる除法など
	○小数の計算…小数の除法（小数÷整数）
第５学年	○小数の計算…小数の除法（1/10,1/100の位など）
	○分数の計算…分数の除法（分数÷整数）
第６学年	○分数の計算…分数の除法
	（分数・小数の混合計算など）

⑵　除法の意味

一般的な「除法の意味」とは，１つ分の数を求める「等分除」と，いくつ分かを求める「包含除」を指す。このことは３年生で学習する。本校の所属する地域では，学校図書株式会社（以下，学校図書と略）の教科用図書を採用している。学校図書では１人分の数を求める操作から「等分除」を先に扱って，除法の意味づけを行っている。４年生での学習場面も「等分除」と「包含除」を扱っている。３年生の学習との違いは，除数が２位数になったり被除数が小数になったりといった数の拡張や，筆算が導入されるなどの点である。

５年生では，「1.6Ｌで320円のジュースの１Ｌ分の値段を求める」という学習場面を提示し，「等分除」に「基準となる量や数を求める」という意味を新たに加え，「等分除」の意味を拡張している。また，「20㎝のこけしは25㎝のこけしの何倍でしょうか」という学習場面を提示し，「包含除」に「何倍かを求める」という意味を新たに加え，「包含除」の意味も拡張している。

６年生では「2／5㎡のへいをぬるのに，青いペンキを3／4dL使います。このペンキは１dL当たり何㎡ぬれるでしょう」という学習場面を提示し，「分数÷分数の意味と計算」を学習する。ここでは，「１dL当たり」を求める内容に

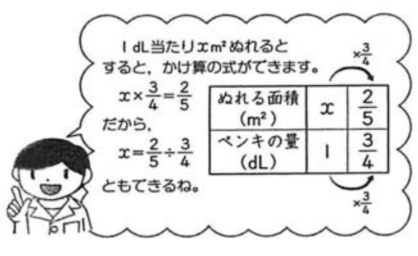
＊長岡市立越路西小学校

なっているので，除法の意味としては５年生の学習である「基準となる量や数を求める」に相当する。

ただし，６年生の教科書には資料２のような記述があり，「除法は乗法の逆として基準となる量や数を求める」といった立式指導を積極的に行っている点に，多少の違いがある。

⑶　問題となる指導単元とその課題

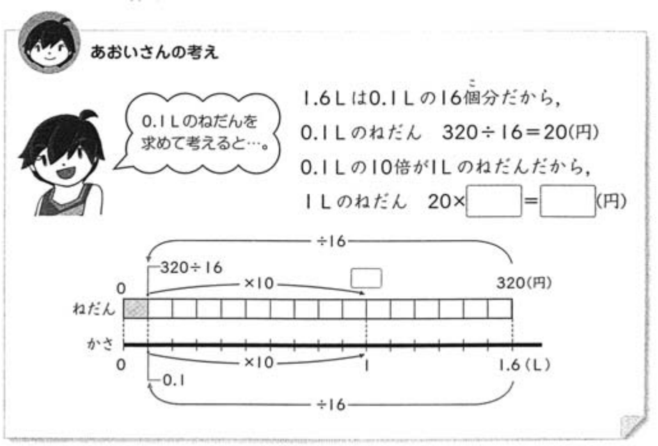
資料２　教科書の記述



これまでに行った小学校における除法の指導系列の概観と，本稿の「はじめに」で記した子どもの実態から，５年生の単元である「小数のわり算とその意味」の「等分除」の意味を拡張する場面に問題が所在していると推測できる。仮に除法の意味の拡張場面に問題があるとすれば，５年生の「包含除」の意味の拡張場面にも同様の問題が内包されている可能性がある。しかし，紙幅の都合により，前者の場面にのみ焦点を当てて論を進める。

学校図書による「等分除」の意味を「基準となる量や数を求める」まで拡張させる場面は，「２Ｌで390円のジュースの１Ｌ分の値段を求める」という導入から始まる。この導入問題は「390円を２等分する」という「等分除」で学習場面を捉えることができる。そのため，子どもがわり算を選択し，「390÷２」と立式するのは容易である。続く「1.6Ｌで320円のジュースの１Ｌ分を求める」の問題に対しても，数直線や図を用いて解答を得るだけなら，さほど難しくない。資料３のように，数直線を用いれば「320÷16×10」と立式でき，これは「等分除」したものを「等倍」するといった考えを用いることができるからだ。

資料３　数直線による解法の図



しかし，「320÷1.6」と立式するのは容易でない。この段階では子どもの除法の概念は，４年生までの「等分除」であり，意味の拡張が終わっていないためである。そのため，教科書では，①「代金÷ジュースの量＝１Ｌ分の値段」という言葉の式を「２Ｌで390円のジュースの１Ｌ分の値段を求める」という導入問題で作らせる，②「1.6Ｌで320円のジュースの１Ｌ分を求める」という新たな問題場面を与える，③先に作った言葉の式に，新たな問題場面の数字を代入させることにより，「320÷1.6」と立式させる，といった流れで立式させている。その後は，まとめとして資料４のような記述を教科書に掲載している。

資料４　まとめの記述

ジュースの量のように，いくつ分にあたる数が小数であっても，１つ分の大きさを求める計算は，整数と同じように，わり算になります。

こういった一連の指導を行った上でも，子どもが「320÷1.6」の立式に難しさを感じるとすれば，それは次の２点であると予想される。１つめは「390÷２」であれば具体的に２つにするという操作活動ができるが，「320÷1.6」は具体的な操作活動が難しいため，立式に信頼性がないことである。子どもにとって操作活動ができないことは，それまでの「等分除」の考え方にはあり得ないことだからだ。２つめは，操作活動ができない小数を整数の時と同じように言葉の式に代入して大丈夫なのか，という点である。

「320÷1.6」の立式の難しさについては，小学校学習指導要領解説（算数編）においても，次のような記述が見られる。「…除数が小数の場合，１に当たる大きさ（基準にする大きさ）を求めているという見方に一般化するのには難しさがある。この点については，公式や言葉の式だけでなく，数直線や図などを用いたり具体的な場面に当てはめたりして分かりやすくすることが大切である。」（p144）*2

以上のことから，「等分除」の意味を「基準となる量や数を求める」まで拡張させ，「320÷1.6」の立式を容易にさせるには，以下の点が指導上の課題となる。

４年生までの「等分除」の意味を５年生の「基準となる量や数を求める」まで拡張させるには，具体的にはどのような指導法が有効なのか。

これらの問題点を解決するために，Vinnerの理論をわり算の指導に当てはめて考える。

3　Vinnerの研究

⑴　指導上の問題点とVinnerの研究との関係

除法を伴う問題解決は，どのように行われるのだろうか。まず，問題場面をイメージし，その場面に除法が適合するのかを判断し，解決に当たると考えられる。したがって除法の概念を形成するには，除法の意味だけでなくイメージをもつことが重要である。そのため問題解決におけるイメージの研究は数多い。

イメージに関する代表的な研究としてVinnerの研究があげられる。Vinnerは「概念定義」と「概念イメージ」を定義し，その相互関係と概念形成について研究している。ここでは，除法を伴う問題解決の思考過程をVinnerの「概念定義」と「概念イメージ」のモデル図で明らかにする。そのことにより，４年生までの「等分除」の意味を５年生の「基準となる量や数を求める」まで拡張させるための具体的指導法について知見を得る。

⑵　除法に関する概念定義と概念イメージ

Vinnerは，「概念を得るとは概念イメージを形作るという意味であると仮定する。」(p.69)[*3] と述べている。除法の学習に当てはめれば，子どもは最初にConcept definition（以下，概念定義と呼称）を学習によって得る。わり算の概念定義とは，３年生で獲得する「等分除」と「包含除」が該当すると考えられる。すると，それに伴うConcept image（以下，概念イメージと呼称）が形成される。概念イメージは，「等分除」と「包含除」に関するイメージと考えられる。具体的には，「等分除」に対しては，「ある数に対して１つずつ配る」といった「配る場面」がイメージされるであろう。また，「包含除」であれば，「基の数がなくなるまで同じ数を何度も引く」といった「繰り返し引く場面」のイメージが考えられる。この概念定義に基づく概念イメージができた段階で，わり算の概念が獲得されたといえる。

除法の概念が形成された後の，問題解決の過程はどのようになるのであろうか。Vinnerは問題解決プロセスの理想的なモデルの１つとして図１を提示している。この図によれば，子どもが問題場面に直面したときには，最初に「配る場面」か「繰り返し引く場面」かを考えることが予想される。そして，「本当に除法か」といった概念定義を参照してから，解答を得ることが理想的である。こういったプロセスに対しVinnerは，理想的な概念形成の状態を「概念定義を司る細胞と概念イメージを司る細胞の２つの細胞から認識構造は成り立っており，お互いが関係付けられていることが望ましい。」(p.70)[*4] としている。

図１　理想的な問題解決プロセス

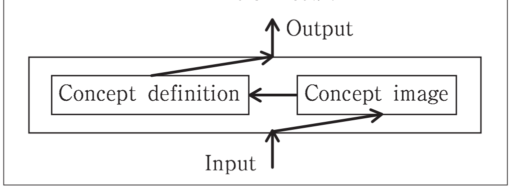
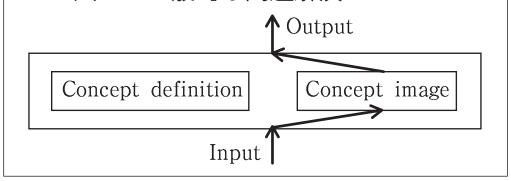


図２　一般的な問題解決プロセス



しかし，一般的には概念定義を参照せず，概念イメージだけで問題解決に臨む子どもの多いことをVinnerは「概念が構築された瞬間に定義は足場を外されるように取り去られてしまう。」(p.69)[*5] と指摘している。その場合の問題解決プロセスは，図２のとおりである。正しい概念イメージが形成されていれば正答を得ることができるが，そうでなければ誤ったイメージを参照するので誤答となる。前述の「１ｍ当たり」というキーワードから，すぐに「わり算」と答えた子どもたちの例は，図２の概念イメージの中身が正しくなかった場合を指す。この場合の概念イメージとは「１ｍ当たりという用語は除法を指す」であり，極めて貧弱なイメージだったと考えられる。

では，子どもが図１や図２のプロセスにより「1.6Ｌで320円のジュースの１Ｌ分を求める」という問題に対し，「320÷1.6」と立式することは可能だろうか。図１の理想的な問題解決プロセスによっても，難しいことが予想される。それは除法の概念定義が４年生までの「等分除」だからである。そのため概念イメージも「配る場面」「繰り返し引く場面」しかなく，「1.6Ｌで320円のジュースの１Ｌ分を求める」という問題はそのどちらにもあてはまらない。４年生までの「等分除」を「基準となる量や数を求める」まで拡張した概念がなければ，立式に至らないのだ。

⑶　得られた知見

Vinnerの研究より，「1.6Ｌで320円のジュースの１Ｌ分を求める」といった４年生までにはなかった「等分除」の場面で，「320÷1.6」という立式を行わせるには，次の２点が考えられる。１つは４年生までの「等分除」に「基準となる量や数を求める」という新たな概念定義を加えることである。もう１つは，Vinnerの指摘のとおり概念イメージだけで問題解決に臨む子どもが多いのであれば、４年生までの「等分除」に関する概念イメージに，新たな「基準となる量や数を求める」という概念イメージを加えていくことである。

４年生までの「等分除」に「基準となる量や数を求める」という新たな概念定義を加えることは，既に教科書で行っ

ている。「320÷２」という４年生までの「等分除」で得られた言葉の式に「1.6」を代入して「320÷1.6」を導き，資料４により，「基準となる量や数を求める」を定義づけるやり方である。しかし，このやり方は前述のとおり，操作活動が行えない点から，子どもが立式に信頼性を置かない・言葉の式に「1.6」を代入しない，の難点が予想される。また，Vinnerの考えによれば，一般的な問題解決プロセスは，概念定義を経由しない場合が多い。

これらのことから，子どもに「320÷1.6」という立式を行わせるには，除法の新たな概念定義を獲得させることに加えて，４年生までの「等分除」の概念イメージに，新たな「基準となる量や数を求める」概念イメージを加えていく指導が現実的である，という知見を得た。

4　教科書の数直線指導と子どもの除法に関する概念定義・イメージ

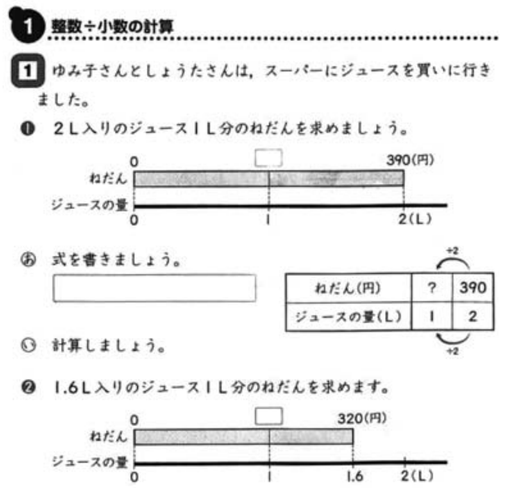
⑴　小数の除法の立式に対する教科書の数直線や表による指導

先で述べた「２Ｌで390円のジュースの１Ｌ分の値段を求める」と「1.6Ｌで320円のジュースの１Ｌ分を求める」という問題に対する教科書の数直線や表の提示は，資料５のようになっている。

指導のポイントとなるのは，数直線や表に付記されている矢印の方向である。資料３の「あおいさん」の「320÷16×10」という考えを説明している数直線にあるように，1.6Ｌから0.1Ｌに移動するには左矢印が書いてあり，同時に「÷16」が付記されている。また，0.1から１へと移動する右矢印には「×10」が付記されている。

そして「２Ｌで390円のジュースの１Ｌ分の値段を求める」場合の表でも，左矢印の上下に「÷２」が付記されている。こういった数直線や表の指導は，子どもの除法の概念定義や概念イメージと一致するのかどうかを次に述べる。もし，数直線や表が一致するのであれば，数直線や表は，「基準となる量や数を求める」概念イメージを子どもに加えていく上で，重要なツールになり得る。

資料５　数直線や表の提示


1 整数÷小数の計算

1 ゆみ子さんとしょうたさんは，スーパーにジュースを買いに行きました。

❶ ２Ｌ入りのジュース１Ｌ分のねだんを求めましょう。

㋐ 式を書きましょう。

ねだん(円)	?	390
ジュースの量(L)	1	2

÷2

㋑ 計算しましょう。

❷ 1.6Ｌ入りのジュース１Ｌ分のねだんを求めます。

⑵　除法に関する子どもの概念定義と概念イメージ

子どもの除法に関する概念定義や概念 イメージを調べるために，Ａ小学校の５年生男子14名・女子16名・合計30名に対して，資料６，７にあるアンケート①，②を平成24年６月25日と６月26日に行った。Ａ小学校は１学年１クラスの小規模校である。アンケート①，②の所要時間は，どちらも15分前後である。

資料６　アンケート①

(ア)たし算の反対は，何算でしょうか。□の中に「+，−，×，÷」のどれかの記号を入れましましょう。
　○たし算の反対は□算

(イ)かけ算の反対は，何算でしょうか。□の中に「+，−，×，÷」のどれかの記号を入れましましょう。
　○かけ算の反対は□算

(ウ)△の中には「＋，−，×，÷」のどれかの記号が１つ入ります。□の中には数字が１つ入ります。どんな記号や数字が入るでしょうか。入れてみてください。
　①８△□＝１　②８△□＝１　③８△□＝１

資料７　アンケート②

（ア）「わり算ってなぁに？」と小学生２年生に聞かれたら，どう答えますか。下の□の中に文で書いてください。絵や図を使ってもいいですよ。

（イ）わり算の式を使う問題文を下の□に書いてください。

＊実際の□は縦に大きく十分なスペースがある

アンケート①の意図は，主に概念イメージに関しての調査である。(ア)と(イ)は，演算記号の反対の意味に関する概念イメージを問う調査である。教科書の数直線や表による指導では，矢印の向きと演算記号の関係が重要である。資料３に掲載した数直線は，右向きの矢印がかけ算を表し，左向きの矢印はわり算を表している。これは，かけ算の反対がわり算であるという考えを基にしている。しかし，子どもにかけ算の反対がわり算であるという概念イメージがなければ，数直線を用いた指導は効果を上げない。(ウ)は表の利用に関する概念イメージを問う調査である。「２Ｌで390円のジュースの１Ｌ分の値段を求める」問題の立式は，資料５に掲載されているとおり，表を利用して「２Ｌ÷２＝１Ｌだから上の数値の390も２で割る」として「390÷２」を求めている。子どもが「比例」を学習していれば，表を利用した「390÷２」の立式は容易であろう。しかし，学校図書では「比例」は「小数のわり算とその意味」の後に学習するこ

とになっている。とすれば表だけ用いて「２Ｌを１Ｌに変える」とすれば，「２Ｌ÷２」以外にも「２Ｌ－１Ｌ」という選択肢がある。子どもが「２Ｌを１Ｌに変える」ために何算を用いるかという問題に対し，「２Ｌ－１Ｌ」というひき算の概念イメージが強ければ，表による立式は「320－□」という，ひき算の立式を行う可能性が大きくなる。

アンケート②の意図は，主に概念定義に関しての調査である。（ア）に関しては，除法の定義についての調査である。小学５年生に対して「わり算とは何か」という問いは難しいので，除法を学習していない２年生に対して説明をする，という形で調査を行った。（イ）の意図は，（ア）で答えた定義を，実際に問題場面に当てはめられるかどうかを調査している。このことにより，（ア）でうまく文章表現できなかった子どもの除法に対する思考を読み取ることができる。文章題で「等分除」の場面を設定していれば，仮に（ア）が無回答であったとしても，その子どもは「包含除」より「等分除」に関する概念定義を習得していることが分かる。

⑶　アンケートの結果

アンケート①については，以下のとおりとなった。

（ア）ひき算と解答…29名　　それ以外…１名　　　（イ）わり算と解答…25名　　それ以外…５名
（ウ）①の△に「－」を，□に「７」入れた児童…２４名　　①の△に「÷」を□に「８」を入れた児童…４名
　　①の△に「－」や「÷」，□に「７」や「８」以外を入れた児童…２名

アンケート②については，以下のとおりとなった。

（ア）等分除の考えで説明した児童…10名　かけ算の反対という考えで説明した児童…９名
　　筆算の説明をした児童…４名　単に「わる」とだけ説明した児童…４名　包含除の説明をした児童…３名
（イ）等分除を想定した児童…21名　　計算式のみ記入した児童…２名　　包含除を想定した児童…１名
　　それ以外を想定した児童…６名

５　考察

⑴　明らかにされた子どもの概念定義と概念イメージ

アンケート①の結果の（ア）と（イ）より，多くの子どもが「たし算の反対はひき算」「かけ算の反対はわり算」という概念イメージをもっていることがわかった。また，（ウ）の結果により，何かの数字を１に変える場合は，わり算よりひき算を用いることが最適であるという概念イメージをもっていることもわかった。このことにより，子どもに表だけを与え，数値の増減に着目させて「320÷1.6」という立式をさせる指導は，難しいことが予想される。そのため，概念イメージの獲得にとっては，表より数直線を主に使用する方が効果的であると考えられる。

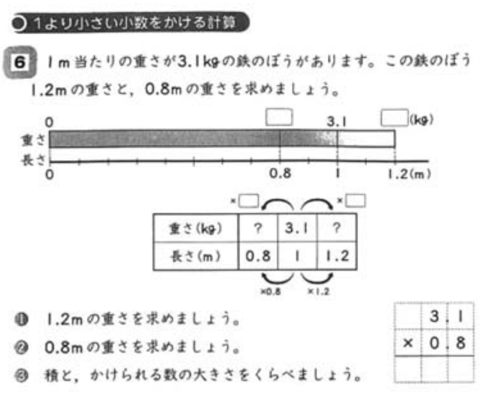
アンケート②の結果からは，子どものもつ概念定義とは，「包含除」より「等分除」の意味合いが強いことがわかった。また，「等分除」と同じくらいに「かけ算の反対」という定義を９名の子どもがもっているが，これは１日前に行ったアンケート①の（イ）を想起した結果と思われる。しかし，子どもにとって想起しやすいということは，獲得しやすい知識であるとも考えられる。アンケート②の（イ）からは，多くの子どもが「等分除」の場面を想定することがわかる。このことから，５年生の「小数のわり算とその意味」の単元の導入問題が，「等分除」の場面から始まることは，子どもの実態に即していると言える。

⑵　数直線による指導の提案モデル

数直線という用語は３年生で学習するが，数直線自体は数の大小・順序・系列を理解させるのに役立つため，１年生の教科書でも扱われている。数直線の指導内容は，①右へいくほど数字は大きい，②目盛りは等間隔である，③連続量として捉える，等である。資料３の数直線の上下にある右矢印はかけ算の表現がされているが，矢印の方向と演算記号の関係については，指導内容として扱われていない。資料８のように左矢印がかけ算の場合もある。

そこで従来にない指導モデルとして，教科書には明確にされていない矢印の向きと演算記号に関する学習を子どもにさせてから，立式指導を行うモデルを提案する。「320÷1.6」の立式の難しさが，操作活

資料８　左矢印がかけ算の場合



動の難しさにあるとすれば，子どもにとって信頼できる操作により「320÷1.6」を立式させればよい。この場合数直線は，１年生の頃から学習に使われているので，子どもにとって取り組みやすい。

具体的には最初に，かけ算と数直線上の矢印の向きについての概念イメージをもたせる。その概念イメージからかけ算の立式ができれば，わり算の立式は比較的容易になる。子どもはアンケート①により，わり算に対してかけ算と反対のイメージをもっていることが明らかにされている。そのため，かけ算の立式ができれば，子どもはその逆として問題をとらえ，わり算の立式に取り組めるからである。

ここからは，図４～６のような数直線を提示しながら，「320÷1.6」を立式させる方法を説明する。最初は「１Ｌが200円のジュースを２Ｌ買ったらいくらになるか」という発問①から始める。すぐに「200×２」と立式することができるだろう。次に「では，1.6Ｌでは？」という発問②を行う。ここでも「200×1.6」は比較的容易である。「200×1.6」の立式が比較的容易なのは，「×」が「倍」を表す記号であることは既習事項であり，「牛丼特盛り1.5倍」や「カップ麺1.5倍増量」等の日常の広告の中でも，既に小数倍に触れているからである。そして，２つの発問に 関する学習結果を図４としてまとめて提示することにより，「基となる１から出発する矢印はかけ算になる」という概念イメージを作る。この「基となる１から出発する矢印はかけ算になる」という概念イメージをもとにして，「基となる１に向かう矢印は，わり算になる」という概念イメージを作り，立式させる点がこの提案モデルのポイントである。

図４　かけ算の数直線

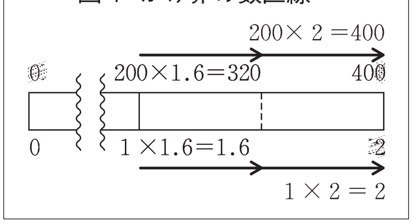


図５　わり算の数直線

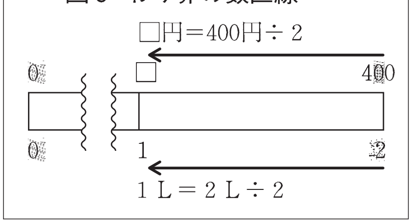
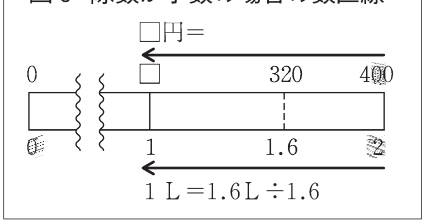


図６　除数が小数の場合の数直線



次に「２Ｌで400円のジュースの１Ｌの値段はいくらか」という発問③を行う。これは「等分除」の考え方が使えるので「400÷２」とすぐに立式できる。そして図５を提示する。図５の提示の意図は「基となる１に向かう矢印は，わり算になる」という概念イメージを作るためである。この概念イメージは「わり算の式として理解しやすい問題設定である」「子どもはわり算はかけ算の逆という概念イメージをもっているので，かけ算の矢印が１から発していれば，その逆はわり算ととらえやすい」という２つの理由により，子どもにとって作りやすい概念イメージであると考える。

そして「では1.6Ｌで320円のジュースの１Ｌの値段はいくらか」という発問④と図６を提示する。子どもは先に「基となる１に向かう矢印は，わり算になる」という概念イメージをもっているため，「320÷1.6」と比較的容易に立式できると考える。

しかし，概念形成は１・２回程度の授業で完結するものではない。４年生までの「等分除」の意味を５年生の「基準となる量や数を求める」まで拡張させ「320÷1.6」と立式させるには，この提案モデルだけに留まらず，①資料３のような「320÷16×10」といった立式や解法を同時に扱うこと，②資料８のように表においては「基となる１から出発する矢印は，かけ算になる」例が示されているため，この段階で数直線で扱う上での矢印と演算記号の概念イメージを作ること，も重要である。いろいろな算数的活動を行い，わり算に対する概念イメージを豊かにしていくことが最終的に「320÷1.6」と立式させる上では大切なのだ。

6　これからの課題

ここまで除法の指導に関するいくつかの問題点を明らかにし，有効と思われる数直線の指導について書き記すことができた。しかし，実践授業による検証は行っていないため，現段階では予想の域を出ない。また，紙幅の都合で，「包含除」の意味の拡張における問題点には，一切触れていない。今後は実践授業を行い有効性を確かめると共に，学習者の除法に対する思考過程をさらに明らかにしていき，除法の指導に関する示唆を得たいと考える。

【引用・参考文献】

＊1・2　文部科学省．平成20年度版．小学校学習指導要領解説　算数編．東洋館出版社

＊3～5　Vinner, S. (1991). The role of definition in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (ed.). *Advanced mathematical thinking,* (pp.65-81). Kluwer Academic Publishers.

平成22年度版．小学校算数教科書第３～６学年用（学校図書株式会社）