教育実践研究　第25集（2015）　73−78

［算数・数学］

知識の限界に気づかせる授業構成に関する研究
− 6 学年「比」の足し算(!?)をめぐる議論を手がかりとして −

笠原　道宏*

1　はじめに

平成19年度から始まった全国学力・学習状況調査や，新潟県が独自に取り組んでいる学力向上推進システムの構築などは，国際調査であるTIMSSやPISAの結果を受け，学力向上を目指した取組である。この取組では，各種調査の出題に対策が施され，ここ数年間にわたるこうした地道な努力によって，確かに学力の数値的な向上が図られていることは，県教育委員会の示した平成26年度全国学力・学習状況調査結果からも明らかである。

ところが，学力の数値的な向上が図られていても，実際の活動場面で子どもが『知識』を不適切に使用してしまう姿に，指導者が困惑してしまう場面は少なくない。例えば，高学年児童にとって最も意味理解の難しい学習のひとつとされている「割合」において，30％の濃度の塩水と40％の濃度の塩水を加えて70％としてしまうようなアイディアは，子どもが導き出しやすい誤答として頻出する。割合の意味は理解できているのであるが，内包量である割合を足したり引いたり，あたかも外延量のように扱ってしまうのである。子どもが，割合の本質的な意味理解をしていない，基準となる１の量が分かっていないと言えばそれまでだが，果たして本当にそれだけなのであろうか。

「知識についての知識」はいわゆるメタ知識と呼ばれるものである。岩崎（1994）は『メタ知識は，その概念がどのように生まれるか，それによって今までできなかったどのようなことができるかを示唆する』と主張し，知識の活用の仕方がメタ知識に属していることを示している。前述した子どもの様相は，活用の仕方についての知識，すなわちメタ知識の構成がうまくいっていない状況だということができるだろう。つまり，知識とともに，メタ知識をも視野に入れた指導が重要なのだ。しかしながら，メタ知識は知識に付随する全ての知識を指しており，非常に暗黙的な性格であるがゆえ，どんなメタ知識を育てていけば前述した問題が解決するのかという疑問も残る。

平林（1985）はこうした問題に対して「数学の効用とともに限界も見るべき」と言明する。そして岩崎（2002）は，子どもが限界をとらえていなければ，知識をどのような時にどの範囲まで用いることができるか分からないという意味で適切に使うことができないと述べ，知識を獲得する際に，その知識のいわば『守備範囲』を子どもがとらえていくことの重要性を指摘している。同氏の見解に基づけば，数学的知識の限界を知ることは知識を適切に活用できるだけにとどまらず，それは同時に新しい知識の適応範囲を見通すことにもつながるということである。一方，数学的知識の限界に気付かせ，『守備範囲』を実際の授業において，どのように子どもにとらえさせていくのか，また，その際の教師の役割とは何かといった部分にはまだまだ研究の余地が残されている。

本研究で，こうした問題意識を背景として，知識の『守備範囲』をとらえさせることで，その知識の理解をより深めることを目的とした授業を行った。本稿では，その中で子どもが数学的知識の限界に気付き，知識の守備範囲が問題となったと考えられる場面において，子ども同士，あるいは子どもと教師の相互作用を詳細に分析し，教室内でどのようなことが起きていたのか，その際の教師の役割とはいったい何であったのかを特定していくことで，授業改善への示唆を得たい。

2　研究の目的

本研究では以下を目的とする。

○子どもが知識の『限界』をとらえたと考えられる授業場面において，何が起こっているのかを詳細に分析し，その場面の特徴を明らかにする。

○メタ知識を豊かに構成するための教師の役割について分析・考察し，授業改善への示唆を得る。

* 長岡市立表町小学校

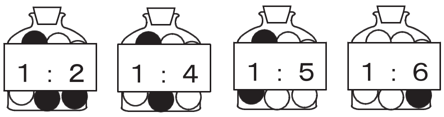
３　研究の方法

本研究はＮ県内における公立小学校において，６学年，男子10名女子10名（計20名）に対して，平成20年11月に筆者が行った計３時間の「比」の実践授業を分析する。「比」は割合の考え方を基にした概念として見ることもできる。「比」は片方を１と見たとき，もう一方がいくらかを表すものである。一般的に，全体を１と見たとき部分がいくらかを表すものが「割合」で，これは全体と部分の比とも考えられる。理解の困難性は，割合も比も内包量であって外延量でないところにある。また，具体的な量ではなく，『関係』であり，特に全体をあるいは一方をひとつのまとまり「１」と見ることに，その難しさがある。この１とは何であるかの理解が十分でないと，割合を活用することは難しい。

ここでは，筆者が計画した「比の足し算」の授業を分析の対象とする。比を足し合わせる作業の中で，１とは何かに気付いて欲しい願いを持って計画した授業である。まずは，３時間の授業において，詳細なプロトコル（発話記録）を作成した。ここでの授業を対象として，子どもが「比」の限界をとらえるまでの場面を特定する。その際，授業においてどんなことが起こっていたか，教師の行っていた教授行為は何かを明らかにする。

４　授業実践及び分析（第６学年　比）

【問題】お祭りでくじ引き屋の出店を出します。
くじの玉を，赤（あたり）１：白（はずれ）３にします。道具屋さんには次のセットが売っていました。ふたつのビンを混ぜて，赤１：白３の割合にするには，どれとどれを購入すればいいでしょう。
＊どのビンにも，同じ数だけ玉が入っていますが，何個入っているかは分かりません。



分析対象となる授業実践以前に，子どもは一通り『比』の概念は学習してきた。ＡとＢを割合の考え方で見て，ａ：ｂと表記できるだけでなく，ａとｂをその公約数で割ることで，比を簡単にできることも学習した。本実践では，一通り比の学習を終えたと思われる状態の子どもを対象に，右図に示した問題を提示し，比の足し算を考えさせることとした。４種のビンの中には，どれも同じ数だけ玉が入っていること，赤玉対白玉の比は提示したが，いくつ入っているかは分からないことを確認した。そして，赤白玉が混在して入っている４種のビンの中の二つを選んで，１：３の比をつくり出すことが問題となり，どれとどれを選ぶかで議論となった。

⑴　（Ａ：Ｂ）＋（Ｃ：Ｄ）＝（Ａ＋Ｃ）：（Ｂ＋Ｄ）が支持される場面

課題が提示されるやいなや，すぐさま子どもは反応してきた。【Ｓ１】は，その場面における発話記録である。

なお，児童名はローマ字，Ｔは教師，Ｐは特定できない子ども，PPは複数の子どもである。

番号	話者	発話内容と補足
0076	uma	え～そんなのすぐ…
0077	T	ちょっと待って…自分の考えをノートに書いてみてからにしてよ。
0078	PP	～全員がノートに自分の考えを書き始める～
0079	ugo	はい。（挙手をする）
0080	T	あぁ，もう言いたいの…どうぞ。
0081	ugo	えっとですね。１：２と１：４を合わせるとですね。
0082	PP	そうそう…
0083	ishi	おれも同じ。
0084	T	みんな同じなの？
0085	ugo	だってそれ以外考えられないよ。赤玉が１＋１で２でしょ。それで白玉が２＋４で６になる。
0086	T	どこが１：３なの？
0087	ugo	だから，そうすると２：６になるから…
0088	uya	比を簡単にして１：３ってことになる。
0089	T	ああ…なるほど。２：６で簡単にして，１：３だってこと？みんな同じなの？
0090	keshi	はい…っていうか違うってことあるの？
0091	T	じゃあ，ugoさんと同じだっていう人はどれくらいいるの。
		～全員が挙手しているように見えた～
		～しかし，実際には手を挙げたのは19人で，たった一人だけekaが挙手しなかった～

【Ｓ１】

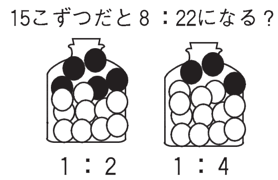
どのビンも赤玉＋白玉の合計数は同じであるわけだから，比として表された１：Ｘの１については，ビンごとにその量は異なっている。しかしながら，子どもはいとも簡単に，異なる１と１を加える方法を選択してきた。前時間までの学習や，割合の学習がどのように展開されたかが問題となるところではあるが，一つだけはっきりしているのは，割合や比（内包量）を，あたかも外延量のように扱ってしまう子どもの様相が如実に表れているということである。

ところが，教室中が一斉に賛成しかけた（１：２）＋（１：４）＝（１：３）のアイディアに対し，たった一人だけ

賛同の意思を表明しない子どもが表れた。それがekaである。この後，このたった一人と残りの19名の間で，対立軸が構成されることとなる。ekaは，前述したアイディアに賛成はできないとの意思表示をし始めたが，代替のアイディアを提出できない状況であった。ekaの反対表明に対し，その意図を子ども達が予想し始めた。(【Ｓ２】)

番号	話者	発話内容と補足
0092	eka	いや。先生ちょっと…え〜違うんだけどちょっと待って
0093	T	何か言いたそうですけど…どうぞ。
0094	eka	いや…まだ…違うってことは違うんだけど，じゃあ何がってのが…ちょっとだけ時間ください。
0095	T	ああ。どうぞ。みんな何か違うって…言ってますけど…聞いてみる？
0096	ako	違うってあり得ないよ。それ（１：２と１：４）以外考えられないでしょ。
0097	rai	ああ，分かった！たぶん…
0098	T	ekaさんが言おうとしてること分かったの？まだ言ってないのに。
0099	rai	いや，多分だけど…
0100	eka	分かった。先生もういいです。(もう時間はいらないという意味で)
0101	T	ああ，ekaさん（何か言いたいことが）まとまったんだね。じゃあ，言ってもらおうかな。
0102	T	でも，その前に…raiさん，さっきekaさんが言おうとしていること分かったって…なんだと思うの？
0103	rai	多分ですけど…他の組み合わせがあるんですよ１：２と１：４以外に…
0104	PP	ああ，なるほど〜（多くの子が納得したようにため息を漏らす）

【Ｓ２】



【図１】ekaの描いた図

ekaは【Ｓ１】の場面で，教師に考えをノートに書くよう指示された際に，図１のような図を描いていた。ekaの描いた図からは，両方のビンの中の個数を同数にしていることが明確に分かる。自分で，比が適切になるよう全体量を設定し，赤玉と白玉の合計から比を求めると，１：３にならないことを発見したのだ。ところが，ここでの「問題」はどれとどれを選択すればいいのかが問われている。ekaはその見当を付けるため，発言を途中でやめてしまった。一方で，eka以外の子どもはこのとき何を考えていたか。0096「違うってあり得ないよ。」の発言が示すように，（１：２）＋（１：４）＝（１：３）になることを，自信をもって主張している。raiの0103「他の組み合わせがあるんですよ１：２と１：４以外に…」は，よりその傾向が顕著で，ekaが反論しようとしているのは，『それだけではない』という点においての反論であって，決して自分たちのアイディアが，否定されるものではないと信じて疑わない様子が明確に表出している。

⑵　１対19の対立軸が形成される場面

続く【Ｓ３】の場面では，いよいよekaが自分のアイディアを主張することとなった。その主張は，教室内にいた全ての子ども達の誰もが予想だにしないものであった。

番号	話者	発話内容と補足
		〜ekaが黒板の前に出てくる〜
0123	eka	えっとですね…私は違う組み合わせを選びました。
0124	ano	え〜…どれだ？
0125	eka	１：２と…
0126	PP	え〜！！（驚きの声が上がる）
0127	T	まあ，聞いてみようよ。１：２と…もう一つは何を選んだの？
0128	eka	１：２と１：５を合わせると，２：６になります。
0129	PP	え〜！！（再び驚きの声が上がる）
0130	ugo	何で，１：５を選ぶのかが分からん。
0131	uya	２：７になるじゃん。
0132	eka	だって，数が同じなんですよ。ビンの中に入っている数はみんな同じって。
0133	uma	わかんない。全然分かんない。
0134	ada	何で，それを合わせると１：３になるの？
0135	eka	１：２を２：４にします。簡単にしてもいいってことは逆にしてもいいでしょ。それで，１：５と足せば３：９になって，簡単にすると１：３になります。
0136	ugo	ちょっとまって，そんなこと…ダメでしょ。
0137	eka	なんで？
0138	ugo	だってなんで２：４にするの？しちゃだめだよ。
0139	T	みんなはどう思う？
0140	uga	片方だけ倍にすると（１：２→２：４）ずれるじゃん。

【Ｓ３】

0125 ekaが「１：２と…」と発言した瞬間に，それを聞いていた全員が，驚きの声を上げる。Ｓ２におけるraiの予想通りであれば，１：２も１：４も選択されないはずなのだ。この瞬間，ekaの発言は，教室中の全員を相手にした反論であることが明確となった。そして，そこで選択された１：２と１：５は多くの子ども，もっと正確に言うならば

eka以外の全員が理解できない組み合わせであった。

当然のように，その二つを選択した理由が問われることとなる。ekaは0135において「１：２を２：４にします。」とその理由を説明したが，何のために行われた行為であるかが不明瞭なので，支持を受けることはない。それどころか逆に，その意図がかえって理解できないこととなってしまう。子どもは比の右項と左項に同数をかけても，あるいは同数で割っても比そのものの関係が変わらないことは理解している。しかし，この場合は片方の比だけの数値を変化させていることに対して強烈な違和感を感じているのだ。次の【Ｓ４】で，その不快さがより強く示されることになった。

番号	話者	発話内容と補足
0150	T	ちょっと待ってください。簡単にしたり倍にしたりはだめなの？だって，みんなも１：２と１：４を合わせて，２：６にしてそのあと１：３って（簡単に）してますけど。
0151	ugo	それはいいんですよ。先生。
0152	uga	ekaのは足しちゃう前に，片っぽだけ倍にしてる。片っぽ倍にするんだったら，もう片っぽも倍にしなきゃだめですよ。
0153	T	あぁ，なるほど。片っぽだけじゃだめだと…ってekaさん，言われてますけれど？
0154	eka	いいんですよ。倍にしたって，比は変わらないじゃないですか。
0155	ana	比は変わらないかもしれないけど，片方だけはだめでしょ。
0156	ugo	そうそう，だから比も階段になっててさ…
0157	T	階段？また，なんか変なこと言い出してるけど…みんな階段っていってる意味分かるの？
0158	PP	はい。分かりますよ。
0159	T	いや，先生には全然通じないよ。階段って何？ ～ugoが黒板の前に出てくる～
0160	ugo	だから比も１：２から２：４，３：６とどんどん形が変わるじゃないですか。
0161	uya	それで，一番小さいのが最小…
0162	T	ああ，なんか名前付けていいですよ。
0163	ugo	じゃあ，『最小比！』１：２を２：４にしちゃうと，それは最小比じゃない。最小…最小…最小第二の比ってことになるから…
0164	ano	また，変な名前付けた。でも，意味は分かる。
0165	eshi	最小比と，最小第二の比を足しちゃうってことは，それはだめでしょう。数変わっちゃうよ。

【Ｓ４】

uga 0152「片っぽだけ倍にしてる」とeka 0154「倍にしたって，比は変わらない…」の発言を比較すれば，数値を「外延量」として見ているugaの視点と，数値を「割合」として見ているekaの視点が明確にずれているのが分かる。ここで重要なのはekaの方が数学的に正しい見方をしていて，ugaを含む子どもたちが誤った見方をしているということではない。加えるという行為は，そもそも外延量の世界のみで成り立つのであり，扱った数値が「割合」であるということに，子どもの学習経験からではなかなか配慮ができないのだ。一方で，ekaは「倍にしたって，比は変わらない…」と表現していることから，比はそもそも２量の関係であり，倍加したところでその『関係』には変化がないことをとらえてはいる。ただし「具体」と「関係」，言い換えれば『量』と『割合』の違いを明確に説明できておらず，そこに合意を取り付けられない原因がある。そこでekaは【Ｓ５】において，いよいよ具体的な量を話題にし始めた。

番号	話者	発話内容と補足
0166	eka	いいんですよ。最小比じゃなくても。
0167	T	じゃあekaさん。なんで１：２を２：４に…
0168	eka	（教師の話を遮る形で）最初，問題出されたときにビンの中はみんな同じ数だけ玉が入っているってことでしたよね。
0169	uma	はい，そうですよ。
0170	eka	だから，例えば12個ずつ入っているとするじゃないですか？
0171	ako	12個とは限らないけど…
0172	eka	まあ，例えばってことですよ。それで，12個入りだとすると，１：２のビンは（図を書き始める）赤玉４個白玉８個ってことになりますよね。
0173	PP	はい。（教室中が頷く）
0174	eka	１：５のビンは赤玉２個，白玉10個ってことになりますよね。
0175	eka	合わせれば赤６個白18個で１：３になるじゃないですか？だから１：２と１：５なんですよ。
0176	T	ああ，なるほど…どう？みんな納得？
0177	ina	確かに12個の時はそうなるってことは分かった。
0178	eshi	いや，それはたまたま12個入りの時そうなるだけで，ビンの中に12個入っているとは限らないじゃないですか？12個の時はたまたまそうなるってことで…
0179	uma	いや…なんか変だな？
0180	ugo	それだと…ekaの方が正しいってことになる。

【Ｓ５】

ここでは，子どもらしい『階段』『最小比』『最小第二の比』といった言葉を使ってekaの論理を不適であると主張し

ようとしている姿が表れている。対するekaは，１：２と１：５で示されたビンの中身を同数として表すのには，６の倍数個での表記が必要であることから，具体量を12個に設定し説明を試みようとした。ビンの中に図示された赤玉と白玉の個数の比は，一目瞭然となりekaの主張は集団の合意を得ることとなる。しかし，その合意はekaが示した12個の場合においては正しいが，集団が主張してきた１：２と１：４の組み合わせを根本から否定するまでには至らなかった。0177 ina「確かに12個の時にはそうなるってことは分かった」に，こうした子どもの現状が素直に表れている。

⑶　反例を検討する場面

ところが，ekaの主張に対し，0179 uma，0180 ugoが反応し始めた。

番号	話者	発話内容と補足
0190	T	ああ，どうしてekaさんの方が正しいって…
0191	uga	だってさ…確かにビンの中の数は分からないから12個入っていないかもしれないけれど…もしかしたら12個かもしれないじゃん。実際に12個だったら，ekaのいうことの方が正しいってことになるよ。
0192	PP	確かに…。
0193	ugo	12個以外の時も調べればいいんだよ。
0194	ako	ああ，じゃあ…何個でもいい訳じゃないよね。１：２でも１：５でも分けられる数… ～しばらく間が空く～
0195	ina	６でもいいんじゃない？６の倍数なら何でも
0196	min	じゃあ，60個くらい…

【Ｓ６】

ここまで，首尾一貫して１：２と１：４の組み合わせを主張していたumaやugoは，ekaの主張の正当性を認めようとしているのが分かる。特に0191 uga「～実際に12個だったら，ekaのいうことの方が正しいってことになるよ」の発言は注目に値する。なぜなら12個の場合は『例外』であるとする大勢の主張とは異なり，たった一つでも例外，すなわち反例が成り立つのであれば，支持していた論は成立しないという数学の本質を背景に語られた言葉だからである。

ugoの続く0193「12個以外の時も調べればいいんだよ」は，反例をさらに増やすことで，ekaの主張の正当性を証明しようとしていることは間違いないだろう。子ども達は，この後60個の場合，24個の場合などを例としてekaの１：２のビンと１：５の選択が正しいことを全員で確認した。しかしながら，なぜ１：２を２：４としたのか，なぜ１：２と１：４ではいけないのかは明らかになっていない。具体的な数で試してみたら，求めるべき結果は分かったが，なぜそうなるのかはいまだ不明な状態なのである。

⑷　比と具体量の違いが検討される場面

教師はここで今までのスタンスを一変させ【Ｓ７】において子どもに任せていた議論の主導権を積極的に取り始める。

番号	話者	発話内容と補足
0302	T	どうして，１：２と１：４を足しても１：３にはならないんだろうね？
0303	eshi	実際の数さえ分かってれば，それを足せばいいんだよ。
0304	ano	１：２って１個と２個じゃないから…簡単に比は足しちゃだめなんだよ。
0305	P	じゃあどうすればいいの？
0306	T	比と実際の数の違いって何なんだろうね？
0307	ugo	それは…単位がついてない…
0308	T	じゃあ，比で表されている数字に単位を付けてみてはどう？
0309	rai	１個：２個。１個：４個ってこと？
0310	uma	ああ，だめだよ。そうすると１個：２個の方は合わせて３個ってことになるし，１個：４個の方は５個ってことになるじゃん。３個と５個って…同じ数なんでしょ。
0311	uya	だから，こっち（１：２）の１個とこっち（１：４）の１個は違うんだよ。だから足しちゃだめなんだよ。
0312	PP	ああ，なるほど…

【Ｓ７】

ここまでの場面で，教師はできるだけ子どもの判断を尊重し，言わば司会者的な役割で議論のコントロールを務めていた。しかし，【Ｓ７】では0302「どうして…（中略）…ならないんだろうね」0306「比と実際の違いって何なんだろうね」のように，積極的に議論をコントロールしようとしているのが分かる。また0308「～単位を付けてみてはどう？」のように，疑問を解決するための活動提案も行っている。ここには，「比」の割合的な見方と，外延量の違いに気付きかけている子ども達の視点を整理し，焦点付けようとする明確な意図があり，同時にそれは，比と実際の数を比較させることで『単位』というキーワードを引き出すことに成功し，比に単位を付けさせることで，比の持つ非具体を顕在化させることをねらった，意識的な教授行為であった。

5　考察

知識に付随し獲得されるメタ知識は，暗黙的であるがゆえに本実践を通して，どのようなメタ知識が構成されたかを正確に推し量ることは難しい。Ｓ１～Ｓ３において，比の右項同士，左項同士を簡単に加えていた様相からは，割合も外延量のようにとらえていることが明確に分かる。授業者自身の予想を超え，たった一人以外，教室内の全員がそのようにとらえていたということは，まだまだ割合や比の指導には課題が残されているということだろう。しかしながら，こうしたとらえ方は，たった一人最後まで反対の立場を貫いたekaの主張によって覆されることとなった。比や割合は数学的な考え方として，非常に便利なアイディアであることは間違いない。現に我々の日常生活に置いても，多くの場面で利用されている。ただし，どのような知識も万能ではないのだ。全体を，あるいは片方を１と見なした瞬間から，その数は具体量からかけ離れることとなる。こうした認識は，授業の中でなかなか育ちにくいのも事実である。それはなぜか。授業においては知識の効用を学ぶことがどうしても優先され，その知識を使えない場面，すなわち『限界』はなかなか指導対象にならないからである。こうした状況を踏まえ，本実践では何が有効であったかを考察すれば，次の二点があげられるだろう。

⑴　知識が使えない場面を設定すること

どのような知識も万能ではないことは先に述べたとおりだが，子どももそのこと自体については概ね理解している。差を求める場面で乗法を用いることはできないだろうし，グラフを描くときに，面積の求積公式は必要ないだろう。問題は，子ども自身が「使える」と認識している場面で，実際には「使えない」ことが重要なのである。そこに「おかしい」「なぜ？」といった子どもの追究意欲が生まれることになる。知識の限界は，限界となる状況でその知識を使ってみて初めて認識できるものなのだ。教師の設定した比を足すという行為を促す課題設定は，子どもの『あたりまえ』を覆す状況として，本実践では効果的に作用したということができるだろう。

⑵　子どもに知識を構成させること

子どもに「比は簡単に足したり引いたりすることはできない」と教師が教えれば，前述した問題は容易に解決されるかもしれない。しかし，この場合『比』に対する子どものメタ知識は「先生が，比の加減はできないと言っていた」で終わってしまう危険性が十分にある。中原（1998）が「子どもは数学的知識を，根源的には，子ども自身の心的構成によって獲得する」とした構成主義的な見解の立場から見れば，知識の構成と同時にメタ知識の構成も，子ども自身によって行われることが望ましいのは間違いないだろう。それ故，教師は実践授業において，司会的な役割に努め，子どもの判断を尊重しながら議論をコントロールしていたのだ。最終的にたった一人のアイディアにより，教室内全員の合意を取り付け，結論は導かれることとなるが，ここで重要なのは早々に真理に気付いたekaの存在が大きかったということではない。たった一人であっても自分の信念を曲げない，そして自分の支持するアイディアに対し多くの賛同があったとしても，おかしいと感じれば修正する，こうした数学的に非常に重要な教室文化が育っていることが最も大事だということである。

⑶　教師の役割

構成主義的な立場でいえば，子どもは最終的に間違えることはない，必ず活きる知識を導き出すというのがPiagetやC.Kamiiらに共通した見解である。しかし，学校教育が限られた時間の中で行われる営みであるならば，こうした理念は理想的ではあるが現実的ではない。教師は，必要であれば【Ｓ７】のように積極的に議論に介入し，その道筋を示さなければならない。現に，本実践では比に単位を付ける教師の指示で，その違和感が明らかになり，比は足せないという比の限界が明らかとなっている。ただし，あくまでも議論はコントロールするが判断は子どもに委ねるスタンスが大事だったということである。

引用・参考文献

１．岩崎　浩，「メタ知識の意味」，『数学教育研究』，第９号，上越教育大学数学教室，1994年

２．岩崎　浩，「メタ知識としての「限界（Grenze）」の意味とその役割」，全国数学教育学会誌，『数学教育学研究』，第８巻，2002年，19～29pp

３．平林一榮，『授業を通してみた算数・数学教育の問題－小学校５年の割合を例に－』西日本数学教育学会発表資料，1985年

４．中原忠男，『算数・数学教育における構成主義的アプローチの研究』聖文社，1998年