

[算数・数学]

数学的な表現力を高めるための学習指導法

－三平方の定理の実践から－

土倉 秀夫*

1 主題設定の理由

PISA調査、全国学力学習状況調査などの結果から思考力・判断力・表現力等を問う読解力や記述式の問題に課題があるとされている。この結果からも数学科の授業においては、知識や技能のみを身に付けさせる指導方法から、自ら学び、自己の思考を表現する過程を重要視する学習方法へと転換させる必要がある。そのような学習活動においてはコミュニケーションの活動が大切であり、そこから生徒の主体的な態度の育成を図り、自己の思考を表現させることが、数学的な表現力を高める一つの視点として必要である（金本（1998, pp16-22）を参照）。

実際、新しい学習指導要領の解説（文部科学省，2008）では、数学科の目標の中に「数理的に考察し表現する能力を高める」とあり、考えたことを表現する力の育成を求めていることが挙げられている。

また、多くの学校で教科担任による一斉授業が展開されている。中学生になると生徒一人一人の学力差は大きくなる傾向があり、中には授業の内容が理解できず、板書をノートに写して、理解をしたふりをする生徒も見られる。疑問や分からないという自分の考えを表現することは大切なことである。しかしながら、中学生ぐらいの思春期になると自分の考えや意見、また疑問や分からないということを他人に伝えようとしない生徒もいる。このような状況を解決する一つの手段としてコミュニケーションの場面を意図的に設定し、生徒が主体的に授業にかかわる態度を育成していくことが大切であると考えられる。

本研究ではコミュニケーションを通して数学的な表現力を高めるために、どのような場面で効果的なコミュニケーションの場面ができるか考えてみることにした。

2 研究の目標

課題を解決していく過程の中で、他者とのコミュニケーションの場面を意図的に設定し、数学的な表現力を高めるための方策を探る。

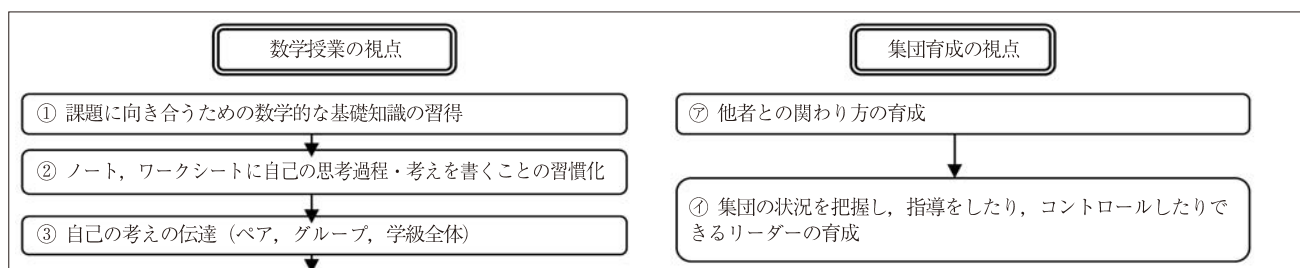
3 研究方法

(1) 数学的な表現力を高めるための指導の流れ

表現力とは生徒自身が感じたこと、聞いたこと、見たこと、知っていることなどを自分なりの方法で他者に伝える力である。そうした場合、生徒自身が何かを感じたり、疑問に思ったりするなど、まずは自分の意見をもたなければ他者とのコミュニケーションは図れないことになる。生徒が課題に対して前向きに考え、自分の考えをもち、それらを表現できるような環境を整えていく必要が出てくる。

数学的な表現力について、他者とのコミュニケーションを図りながら高めていくためには、次の流れで指導していくことにした。なお、本研究における指導の流れは、裕元による授業モデル（裕元，2009, pp.9-16）を参考に考案したものである。

また数学の授業だけを見ていくのではなく、コミュニケーションを図るためにはその背景には数学的な要因だけではなく、集団の雰囲気や人間関係も大きく関わってくると考える。また、グループ学習においては話し合いをコーディネートするためのリーダーの存在も重要になってくる。これら二つの面の指導の流れについて以下の図のようにまとめた。



* 長岡市立東北中学校

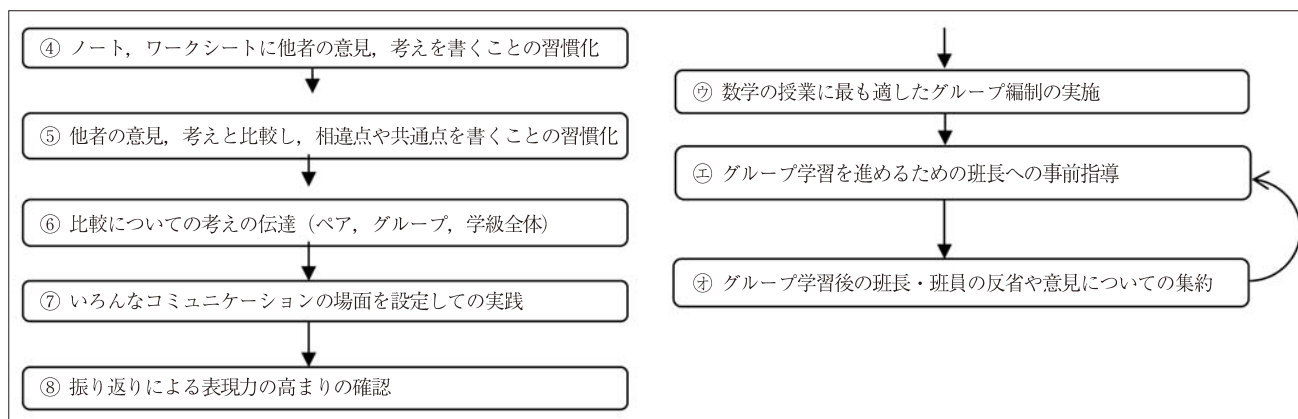


図1 数学的表現力を高めるための指導の流れの構図

① 課題に向き合うための数学的な基礎知識の習得

数学的な表現力は、図、表、グラフ、言葉、記号などを用いて他者に伝える力のことである。その方法は様々であるものの、そこには数学的な基礎知識が必要になってくる。それらを用いなければ数学的な表現力が高まったとはいえない。数学的コミュニケーションの場を設け、表現力の向上を図るための前段階として、目の前に示された課題に対して向き合うことができるための数学的な基礎知識の習得がまずは必要である。また、コミュニケーションの場面を多く取り入れる授業の中で生徒の主体性も高まり、他者とのかかわりからも、習得は図られる。小テストやドリル学習での基礎知識の習得のみならず、このようなコミュニケーションを重視した授業実践からの基礎知識の習得も考えた。

② ノート、ワークシートに自己の思考過程・考えを書くことの習慣化

話し合いの場面をすぐに設定した場合に、生徒間での話し合いの内容はすぐに論理的な話の進め方になるわけではない。まず自己の思考過程を表現することができるようにならなければならない。数学の用語や記号、図や表、グラフといった数学的な表現が使えるようになるとともに、理由や根拠を明確にする習慣を付けていくことも必要である。例えば「～だから・・・になった。」などのように結果を導くための根拠などを日ごろから明確にする習慣を付けさせる。自分のノートやワークシートに書くことから始め、そこから話し合いになったときに、論理的な流れで進めることもできるようになる。話し合いの時に、結果のみの発表の場になることもある。日ごろから自分の考えをノートにまとめておくことの積み重ねが話し合いの場においても有効に生かされる。

③ 自己の考えの伝達（ペア、グループ、学級全体）

日ごろからノートやワークシートに自己の思考過程を書くことを繰り返して行った場合、自己の考えを他者に伝える場面において、最初にノートやワークシートに書かれた自己の考えを伝達することから始める。しかし、ここでは自己の思考過程を整理しているにすぎず、他者の考えを比較したり、それに対して意見交換したりする力はあまり身に付いていない。しかし、自己の思考過程を書くことで整理しているため、意見の発表のみに終わらず、根拠を交えて、論理的に説明することができるようになる。

④ ノート、ワークシートに他者の意見、考えを書くことの習慣化

他者の意見を聞いた場合、それをノートやワークシートに書き写す習慣を付けさせる。特に、ペア学習やグループ学習、全体の発表において自分とは異なる複数の考え方に触れた時に、他者の考えをノートやワークシートに自分なりの解釈で書いておくことが大切である。

⑤ 他者の意見、考えと比較し、相違点や共通点を書くことの習慣化

他者の考えを書くときに、自己の考えと比較し、相違点や共通点を書く習慣を付けさせる。その内容がコミュニケーションの場面になったときに、話し合いの材料になったり、他者の意見に対しての見方を高めたりする練習になる。

⑥ 比較についての考えの伝達（ペア、グループ、学級全体）

自己の考えを、根拠を交えながら伝えることができるようになってきたら、他者の意見に対して意見することができるようになる。話し合いの場面において一方通行ではなく、意見が往き来する中で、一つの考え方が深まっていく。ノートやワークシートに書かれた他者の意見に対しての意見を一つのきっかけとして伝え合い、そこから話し合いへと発展させていく。

⑦ いろんなコミュニケーションの場面を設定しての実践

上記で示したように、時間をかけながらコミュニケーションの力を育成し、表現力を高めてきた。次に、どのようなときにコミュニケーションの場面が設定できるかを考えてみた。（2授業実践とその分析を参照）

⑧ 振り返りによる表現力の高まりの確認

コミュニケーション活動を成立させるには、生徒自身にコミュニケーションを成立させるための力が備わる必要がある。それを高めるために上記のような流れで指導を継続してきた。コミュニケーションを通して、数学的な表現力が生徒にどれくらい備わってきたかを判断するために、教師の見とりだけでなく、自己評価をさせ、数学的表現力の成長を実感できるようにしてみた。各自でその授業におけるコミュニケーションの力はどの段階であったかを自己評価して該当する部分にチェックを入れるようにさせている。

(資料1) コミュニケーションについての自己評価 (授業時のアンケートの一つの項目となる。)

- | |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1 他人の意見に対して、自分の意見と比較し、既習事項や数学的な用語を用いて反論や同調する意見・説明を述べることができる。 2 他人に自分の意見を、既習事項を活用し、数学的な用語などを用いて説明することができる。 3 ノートやワークシートに書いた自分の意見を班員に発表することができる。 4 ノートやワークシートに自分の意見を書くことができる。 |
|--|

㊦数学の授業に最も適したグループ編制の実施 (図1における㊦の詳細について)

コミュニケーションの場面においてはペアやグループが中心となる。そうした場合、グループ編制が重要になってくる。学級での生活班を基本とすると人数が多く、コミュニケーションが必ずしもとりやすい関係とはいえない場合がある。本研究においては数学用の特別なグループ編制を行い、事前にグループ学習を行うことが分かっている場合は座席を替えて授業に入るようにした。主に次のような留意点でグループ編制を行った。

ア グループ編制の方法 (どのグループも等質になるようにする。習熟度別にはしない)

- ①一つのグループを男女別の4人編制とする。人数が合わない場合は3人とする。
- ②定期テスト、基礎学力テスト、小テストの結果をもとに数学の学力順位をつける。順位から生徒を4段階に分ける。
- ③グループ学習を進める班長を考慮し、全てのグループに分ける。
- ④学力順位と日ごろの見取りからの人間関係を考慮し、かかわりやすいグループになるように編制を行う。

イ 班長に対して事前指導の内容 (初めてのグループ学習を行う際に実施)

- ①必ず全員から意見や考えを聴き出すこと。
- ②順番に指名して話を進めるだけでなく、できるだけ自由に話をする事。
- ③分からないことがある人には理解できるまでみんなで説明し合うこと。
- ④必要な物があつたら、すぐに教師に言うこと。(道具など)
- ⑤発表するために意見を整理すること。

ウ 班長に対しての事前指導の内容 (2回目以降のグループ学習での指導)

- ①授業後のアンケートの反省からの話し合いの進め方などのアドバイス
- ②本時の授業のポイントなど
- ③道具の使い方など

(2) 授業実践とその分析

本研究では次のような授業実践 (林 (2004, pp45-49) を参照) を行い、コミュニケーションの場面を設定した。

単元名: 3年 三平方の定理の利用

生徒数: 男子20名, 女子19名 計39名 実施時期: 2月 時間: 2時間の実践内容

課題 同じ長さの12本のマッチ棒があります。全てを使って三角形を作らましよう。

ア ペアの場面

教師→生徒A 教師→生徒B ⇨ 生徒A→生徒C 生徒B→生徒D

個人解決の場面において、解決が進まない、疑問が生じる、誤った理解をしている場合、教師の机間指導で対応する場面がある。教師と生徒の関係からペアや周囲の生徒へのコミュニケーションの場面を増やし、疑問や意見を生徒間で交換する場面を設定することができる。

(資料2) ペアの場面における生徒のコミュニケーションの授業記録

(個人で課題を考える場面において)
S1: こんな感じの並べ方でいいのかな?
S2: これは駄目だよ。ひとつの三角形を作るんだよ。

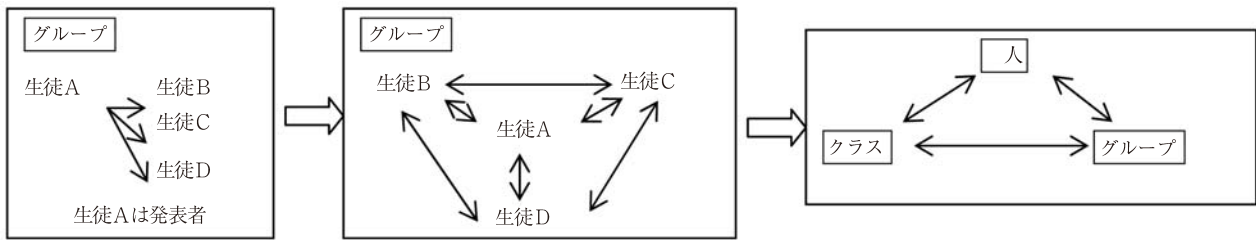


(別の座席において)
S3: よし2種類できた!
S4: おれは3種類できた!
S3: えっ?! 本当かよ! おれも考えてみよう。
S5: おれは4種類できた!

S2：こんなふうにして。(自分の三角形を見せる) S1：あ～なるほど！そういう意味ね！	S4：そんなにできないよ。 S5：だってほらこんな感じで。 S4：なんかこれおかしくない？
--	---

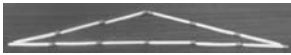
ペアの場面は特に個人の課題解決の場面において、学力が低位の生徒や、課題のとらえ方が不十分な生徒が近くの生徒と素直に確認し合える人間関係が大切である。そのためのグループ編制であり、コミュニケーションがとりやすい関係の生徒が近くにいるように配慮された座席となっている。最初の場面では課題が正確にとらえられない生徒が数名いた。これを隣同士で何気なく確認し合う中で自分の間違いに気づく生徒がいた事例である。また、三角形が少しずつ完成し始めると、互いに何種類できるのか気になり始める。生徒はできるだけ多く作ろうと考えるが、中には6, 3, 3のようなできない三角形もできると主張する生徒が出てくる。分からないことや、間違っただ意見なども言い合えることがコミュニケーションである。

イ グループの場面



グループ学習の場面では発表者が班員に対して自分の意見を発表し、終わると次の生徒がまた発表する。それを班長や記録係がまとめて、クラスで発表する場面が見られる。そこからグループ内での意見交換を活性化させ、グループ内での意見の練り上げを行う。また、グループ内での話し合いで終わらず、グループの意見に対して他者、クラスで指摘し合い、コミュニケーションの場を広げていくことで、学習の深まりが出てくる。

(資料3) グループの場面における生徒、教師のコミュニケーションの授業記録

<p>(各班が完成した三角形を黒板に掲示する中で)</p> <p>S1：あれっ？この5班の図形おかしいよね？</p> <p>S2：本当だ！6, 3, 3の三角形なんて無理だよ！</p> <p>G5：だってマッチ棒でやってみたらできたんだよ！</p> <p>G5：ほらっ！うちの班の机をみてよ。</p>  <p>S1：本当だ！なんでだ？こんなおかしいよ。</p> <p>T：みんなちょっと聞いてくれるかな。今、この図形について5班のメンバーとS1たちもめています。どんな内容か聞いてみましょう。</p> <p>S1：この6, 3, 3の三角形はできないと思います。でも、5班はできるといって実際に見せてくれました。</p>	<p>G5：でもこんなふうにして実際にできているんです。</p> <p>S：そんなのできるわけがないよ！</p> <p>S：うちの班もできたよ。</p> <p>(ざわざわしながら同調する意見や反論がでる)</p> <p>T：実際にこんなふうにして5班はできているんだけど、できないという人もずいぶんいるよね。じゃあできないという人はなぜできないのか、5班を納得させられる人はいるかな？</p> <p>S3：はい！この図の三角形の下の部分は6本です。この斜めになっている2つの辺の合計も6本です。そうすると同数なのだからぴったりと合ってしまい、ここに隙間はできないと思います。</p> <p>S：そうだよ、私も同じ考えだよ。</p> <p>S：他にも説明ができる方法があります！</p>
---	--

課題は実際に具体物を使った操作活動によって三角形を考えさせたため、誤差が生じる課題であった。その誤差のおかげで作図であれば通常考えつかないような6, 3, 3, や1, 5, 6, の辺の三角形を考えた班が出てきた。


最初はおかしさに気づいたS1をはじめとした数人の生徒と、5班というグループ間によるコミュニケーションが図られた。ここでは「個人⇔グループ」という形式でのコミュニケーションの場が成立している。そこでは実際に完成している図形を見せられたS1は、この三角形ができないことに気づきながらも5班に対して説明する力を有していない。このような場面を教師がとらえ、クラス全体へと広げることにより、多くの生徒の目から一つの意見を考えることになる。ここからは「グループ⇔クラス」という形式でのコミュニケーションの場面へと発展する。グループの代表者ができることを実際のマッチ棒で作った図を見せてクラスに同意を求めるが反論が多く出てくる。ここから個人の意見が多く出てくることになる。ここから「個人⇔クラス」のコミュニケーションの場と発展する。

ウ 学級全体の場面



学級全体の発言の場面で生徒から教師への関係ではなく、生徒から生徒への発言の広がりができるような教師のかかわり方を行い、その発言から別の生徒が更に発言をする。同じ生徒間の往き来のみならず、集団全体への意見の広がり可能な場面を意図的に組むようにする。

(資料4) 学級全体の場面における生徒、教師のコミュニケーションの授業記録

<p>(6, 3, 3の三角形ができない理由の説明の続き)</p> <p>S1: 三平方の定理を使えばできないことが分かります! この貼られた図をみると、中央に補助線を引くと直角三角形ができます。斜辺の2乗は9で、その他の2辺の2乗をたすと$9 + 1 = 10$になる。そうすると三平方の定理が成り立たないから、これはおかしいことになります。</p>  <p>S: なるほど。(何人かの生徒が反応する。)</p> <p>S2: いや、実際はもっと隙間が狭いので、中央のこの補助線はもっと短くなるからできるのでは? (これを考えた班の生徒が反論する)</p> <p>S3: そこがどんな大きさであれ、下の部分が3だから2乗したら9になってしまう。だから無理だよ。</p>	<p>S4: この三角形もおかしいよね。 (1, 5, 6の三角形に注目が集まる)</p> <p>S: これも無理だ! (多くの生徒が反応する。)</p> <p>T: これも同じく5班が考えた三角形だね。</p> <p>S2: これもさっきのと同じようにできると思うのですが・・・。</p> <p>S5: これも同じように中央に補助線を引けばさっきと同じように三平方の定理を当てはめてできないことが分かるよ!</p> <p>S2: 両方ともできないような気がしてきました。</p> <p>S2: でも何でマッチ棒でやるとできるんだろう?</p> <p>S6: 微妙に隙間とかあいているよ。辺も曲がっているし! 正確じゃないよ。</p> <p>T: そうだね、マッチ棒の場合だと誤差ができてしまい、あたかもできたかのように見える場合があるんだね。</p>
---	--

6, 3, 3の三角形ができないことを感覚的な部分だけでなく、ある生徒が数学的に説明を始める。この段階ではクラス全体に対しての発表である。この説明に対して意見を考えた班の生徒は反論をして正当化しようとする。ここでは発言に対しての生徒間のコミュニケーションが成立している。しかし、1対1の往き来のコミュニケーションではなく、別の生徒がコミュニケーションに入ってくることで、課題解決に向けた練り上げの場となっている。生徒が他人の意見を受け入れ、それを他の意見にも当てはめて考えることで更なる考えの発展がなされている。また誤答が出たおかげで、意見の対立が生まれ、互いに相手を納得させるために数学的な根拠を用いることの有用性を見出してきている。それをクラス全体の場で共有できるが大切である。

4 考察

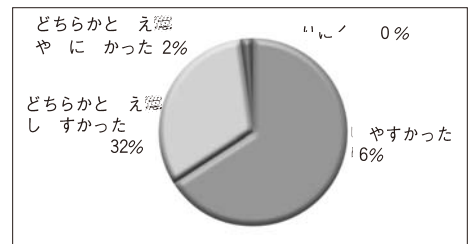
本研究では数学的な表現力を高める一つの視点としてコミュニケーションの場面を多く取り入れる実践を行った。またコミュニケーションを通しての数学的な表現力を高めるための手段として、日ごろからノートやワークシートに自己の考えや、他者の考えを記録することを習慣化させた。その際、他者の意見と比較し、相違点や共通点をまとめることを重要視させ、意見交換するための材料を準備させてきた。次に書くという表現をする中で自己の考えを整理し、コミュニケーションへと発展させるようにした。これらの活動をとおして授業への取り組み方や意欲に関わる情意面での変化と、表現力における生徒の変容を意識調査の面からとらえてみた。

意識調査 対象生徒数 男子20名、女子19名 計39名 実施回数: 5回 (各単元の授業後に質問紙にて実施)

(1) 班編制に関わる意識調査

数学の授業用のグループ編制を行った際にとったアンケートの結果である。それまでの授業では学級での座席で4人組をつくりグループ学習を実施してきた。しかしながら、かかわりにくい関係であったり、男女の隔たりがあったりすることから素直な意見交換ができない場面も多く見られた。数学用のコミュニケーションを重視した班編制は生徒にとって活動がしやすく、コミュニケーションが図りやすい面からも意欲的に課題に取り組み、数学的な表現力を向上させる一つの要素となり得た。

表1 このメンバーでのグループ学習はやりやすかったか?



(2) 意欲に関わる意識調査

表2 「意欲的に授業に取り組むことができたか」の結果

回数	できた	どちらかといえばできた	どちらかといえばできなかった	できなかった
1回目 (平方根)	65%	35%	5%	0%
2回目 (関数)	72%	28%	0%	0%
3回目 (関数)	78%	22%	0%	0%
4回目 (内接円の作図)	88%	12%	0%	0%
5回目 (三平方の定理)	90%	10%	0%	0%

上記の表だけを見た場合は順調に意欲的に取り組む生徒が増加しているように捉えることができる。しかしながら、学習内容が大きく異なるため必ずしもこの結果がすべてとは言いきれない面もある。やはり、図形分野での操作活動を多く取り入れた授業において生徒は意欲的に取り組む傾向が強く出ている。また、コミュニケーションの場面を多く取り入れる授業においては、一人一人が授業にかかわる場面が増加し、より意欲的に取り組むことができる。この意欲的な姿勢がコミュニケーションにも生かされ、学習内容の習得や表現力の向上につながると思われる。

(3) 発言に関する意識調査

表3 「授業において自分の考えを他人に伝えることができたか」の結果

	できた	どちらかといえばできた	どちらかといえばできなかった	できなかった
1回目(平方根)	64%	13%	18%	5%
2回目(関数)	68%	19%	8%	5%
3回目(関数)	70%	20%	5%	5%
4回目(円に内接する図形の作図)	72%	23%	5%	0%
5回目(三平方の定理)	77%	18%	5%	0%

自分の考えを他人に伝えるということは、課題に対してしっかりと向き合い、自分なりに考えを持つことが必要となる。それを書くことから始め、コミュニケーションの場面でそれを伝える。他者の意見と触れあう中で表現の仕方、伝え方について学び合い、表現力の高まりにつながる。上記の結果では少しずつであるが「できた」と答える生徒の割合が増加してきた。しかし、「どちらかといえばできなかった」と答える生徒が0%になることはなかった。この生徒たちは日ごろから他者とのコミュニケーションが苦手な生徒たちである。このような生徒たちを成長させるための手段でもあることから、更なる場の設定の工夫が必要であると感じた。

(4) 生徒の意見の変容から

ある生徒の授業後のアンケートのコメントからの抜粋

1回目

A男さんの説明が分かりやすかった。班での学習は楽しく、意見が言いやすいのでよかった。(B子の意見)



4回目

5班の意見に対して、C男さんが三平方定理を使ってできないことを証明したときの説明はとても分かりやすかった。三平方の定理は長さを求める場面だけでなく、こんなふうな使い方があることに驚いた。私が考えた三角形は1種類足りなかった。(B子の意見)

生徒のアンケートの内容にも変化が見られている。1回目の初期段階のアンケートでは他者の意見に注目するもの内容までは掘り下げていないコメントである。また授業の感想もグループでの楽しさの面に向いている。そこから3回目の内容では、他者の意見の内容に目が向き、自己の考えも入れながら書くようになってきている。この取組を更に長期的に継続していく中で、何が分かりやすかったのか、どの表現によって分かりやすくなったのかなどに目を向けさせることにより他者の意見に対しての見方を成長させることができる。他者の意見の見方が身に付くことで、コミュニケーションの場面においても一つの意見をより深めることができ、そこには数学的な表現力の高まりが伴ってくるといえる。

5 おわりに

本研究では、「数学授業の視点」からと「集団育成の視点」から実践に取り組んできた。授業の課題の工夫や進め方の工夫によって生徒はより主体的に授業に取り組むようになったし、それが結果として学力の向上・表現力の向上につながった。また「数学的な表現力の向上」という目標の達成のためには数学の基礎知識の習得と数学的な思考力が根底にあり、それを用いて表現することになる。習得の場面であったり、コミュニケーションの場面であったりしても、生徒の前向きな姿勢や集団でのかかわり方によっては成長に大きな差が出てくる。やはり、集団育成の視点から、活動に取り組む姿勢や他者とのかかわり方を育成しておくことが数学の場面でも大切である。自分が感じたこと、考えたことを素直に話せる雰囲気などの環境の整備と、授業者の工夫があつて様々な生徒の成長につながるといえる。

また、本研究においては学級担任の立場から指導のしやすさもあつたが、それ以外の担当クラスでも同じような質での取組ができなければならない。集団の把握や育成の方法は数学の授業を通してできるはずである。そういった視点も更に磨いていきたいと感じた。

【引用参考文献】

文部科学省(2008). 中学校学習指導要領解説数学編.

金本良通(1998). 『数学的コミュニケーション能力の育成』. 明治図書.

松元新一郎(2009). 『中学校新数学科「数学的な表現力」を育成する授業モデル』. 明治図書.

林 衛(2004). マッチ棒でつくる図形. 明治図書図学教育2月号 No.555, PP45-49.